Exercice 11

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

2. Supposons, par l'absurde, que la série $\sum \frac{1}{n}$ converge, c'est à dire que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel.

   On a, d'après 1), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$. Par passage à la limite on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$ qui est impossible car $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} - \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$.

   Donc la série "harmonique" $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$ diverge.

Exercice 12

On considère la série $\sum \frac{1}{e^n + e^{-n}}$ et on note S_n la n-ième somme partielle de cette série.

1. $\sum \frac{1}{e^n + e^{-n}}$ est une série à termes strictement positifs, donc sa suites de somme partielles est strictement croissante.
2. On a $\forall k \in \mathbb{N}$, $e^k + e^{-k} \geqslant e^k$ car $e^{-k} \geqslant 0$. Le passage par l'inverse donne

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \frac{1}{e^k + e^{-k}} \leqslant \frac{1}{e^k} = e^{-k}.$$

3. On a $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{e^k + e^{-k}} \leqslant e^{-k} = \left(\frac{1}{e}\right)^k$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{e}\right)^k = \frac{1 - e^{-(n+1)}}{1 - e^{-1}}$
4. La série $\sum \frac{1}{e^n + e^{-n}}$ converge par comparaison avec la série géométrique $\sum \left(\frac{1}{e}\right)^n$. Par passage à la limite dans l'inégalité de la question 3) on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^n + e^{-n}} \leqslant \lim_{N\to+\infty} \frac{1 - e^{-(N+1)}}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e-1}$.

Pour aller plus loin

Exercice 13

Étudier suivant les valeurs du réel strictement positif α, la nature de la série de terme général u_n défini par

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n^2 + k)^\alpha}$$

On a pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\frac{1}{(2n^2)^\alpha} = \frac{1}{(n^2+n^2)^\alpha} \leqslant \frac{1}{(n^2+k)^\alpha} \leqslant \frac{1}{(n^2)^\alpha}$, soit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n^2)^\alpha} \leqslant u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n^2)^\alpha}$.

Donc pour tout $\in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{2^\alpha n^{2\alpha-1}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^{2\alpha-1}}.$$

Or la série $\sum \frac{1}{n^{2\alpha-1}}$ converge si, et seulement, si $2\alpha - 1 > 1$, c'est à dire, $\alpha > 1$. Il découle alors des théorèmes de comparaison que la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Exercice 14

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes. Montrer que les suivantes sont aussi convergentes

$$\sum \min(u_n, v_n), \sum \max(u_n, v_n), \sum \sqrt{u_n v_n} \text{ et } \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$$

On a pour tout $(x,\ y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \min(x,\ y) \leqslant \sqrt{xy} \leqslant \max(x,\ y) \leqslant x + y$ et $\dfrac{xy}{x+y} \leqslant x$.

En effet, $(\min(x,\ y))^2 = \min(x,\ y) \times \min(x,\ y) \leqslant xy \leqslant (\max(x,\ y))^2 \Rightarrow \min(x,\ y) \leqslant \sqrt{xy} \leqslant \max(x,\ y)$,

et comme $\max(x,\ y) = x$ ou $\max(x,\ y) = y$, on a $\max(x,\ y) \leqslant x + y$. Pour la deuxième inégalité, on a $\dfrac{y}{x+y} \leqslant 1 \Rightarrow \dfrac{xy}{x+y} = x\dfrac{y}{x+y} \leqslant x \times 1 = x$.

En remplaçant x et y par u_n et v_n on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\min(u_n,\ v_n) \leqslant \sqrt{u_n v_n} \leqslant \max(u_n,\ v_n) \leqslant u_n + v_n \tag{1}$$

et

$$\frac{u_n v_n}{u_n + v_n} \leqslant u_n \tag{2}$$

Comme $\sum u_n + v_n$ et $\sum u_n$, il résultent de 1), 2) et du théorème de comparaison que les séries $\sum \min(u_n, v_n)$, $\sum \max(u_n, v_n)$,
$\sum \frac{u_n v_n}{u_n+v_n}$ convergent .

Exercice 15

Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs convergente.

1. Montrons que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a :

$$a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant 2a_n \Leftrightarrow a_n \geqslant \frac{1}{2^n}$$

En effet, on a :
$a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant 2a_n \Leftrightarrow a_n^{-\frac{1}{n}} \leqslant 2 \Leftrightarrow (a_n^{-\frac{1}{n}})^{-n} \geqslant 2^{-n} \Leftrightarrow a_n \geqslant \dfrac{1}{2^n}$
Montrons que

$$a_n \leqslant \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

En effet, comme $1 - \dfrac{1}{n} \geqslant 0$, on a :
$a_n \leqslant \dfrac{1}{2^n} \Leftrightarrow a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant \left(\dfrac{1}{2^n}\right)^{1-\frac{1}{n}}$ Or $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)^{1-\frac{1}{n}} = \left(\dfrac{1}{2^n}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$
Donc

$$a_n \leqslant \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

2. Supposons que $a_n \geqslant \dfrac{1}{2^n}$, on aurait, d'après 1), $a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant 2a_n$ et en particulier $a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant max\left(2a_n,\ \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$.
Supposons que $a_n < \dfrac{1}{2^n}$, on aurait d'après 1) $a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$ et en particulier $a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant max\left(2a_n,\ \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$.
Dans tous les cas on a $a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant max\left(2a_n,\ \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$.

3. Les séries $\sum 2a_n$ et $\sum \dfrac{1}{2^{n-1}}$ convergent, donc $\sum max\left(2a_n,\ \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$ converge aussi (voir exercice 14).
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant max\left(2a_n,\ \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$, on a d'après le critère de comparaison sur les séries à termes positifs, $\sum a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge.