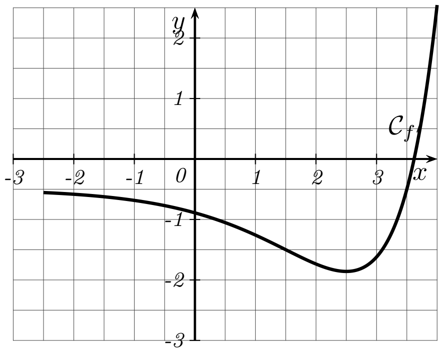
TD du Chapitre 11

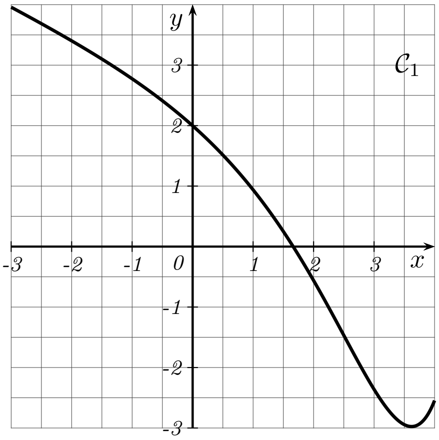
Exercice 1 (Un peu de lecture graphique).

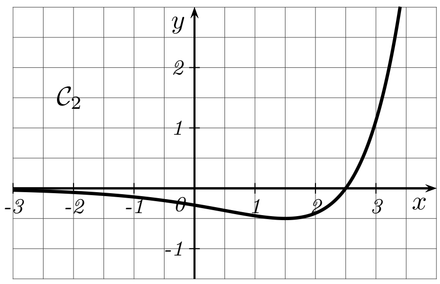
Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde. La courbe représentative ***de la fonction dérivée notée $\mathcal{C}_{f'}$ est donnée ci dessous****. La droite T est tangente à la courbe $\mathcal{C}_{f'}$ au point d'abscisse 0.*



1. *Par lecture graphique : (a) Résoudre $f'(x) = 0$. (b) Résoudre $f''(x) = 0$.*

2. *Une des deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f et une autre la courbe représentative de la dérivée seconde f''.*





   (a) *Déterminer la courbe qui représente f et celle qui représente la dérivée seconde f''.*

   (b) *Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.*

   (c) *Donner les coordonnées du point d'inflexion de la courbe représentative de f et une valeur approchée du coefficient directeur de la tangente en ce point à la courbe.*

Exercice 2 (Étude de fonctions).

Réaliser l'étude complète (tableau de variation, convexité) des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x} + x$ *2.* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2\, e^{-2x}$ *3.* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$ *4.* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x^2}$

Exercice 3. *Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur I. Quelles sont les fonctions qui sont C^1*

sur I ? Expliciter la dérivée de chacune de ces fonctions sur son intervalle de dérivabilité

$I = \mathbb{R}_+, \quad a(x) = \sqrt{x}e^{-x}$ $\qquad I = \mathbb{R}_+, \quad b(x) = \ln(1+\sqrt{x})$

$I = \mathbb{R}_+, \quad c(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ $\qquad I = \mathbb{R}_+, \quad d(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x)}{x} & si\ x > 0 \\ 2 & si\ x = 0 \end{cases}$

$I = \mathbb{R}_+, \quad e(x) = \begin{cases} \exp(x \ln x) & si\ x > 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$ $\qquad I =]-\infty, 1], \quad f(x) = x\sqrt{1-x}$

$I = [-1, 1], \quad g(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$ $\qquad I = \mathbb{R}, \quad h(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$

$I =]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[, \quad i(x) = x\sqrt{x+x^2}$ $\qquad I = \mathbb{R}_+, \quad j(x) = \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{x}}{e^x - 1} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

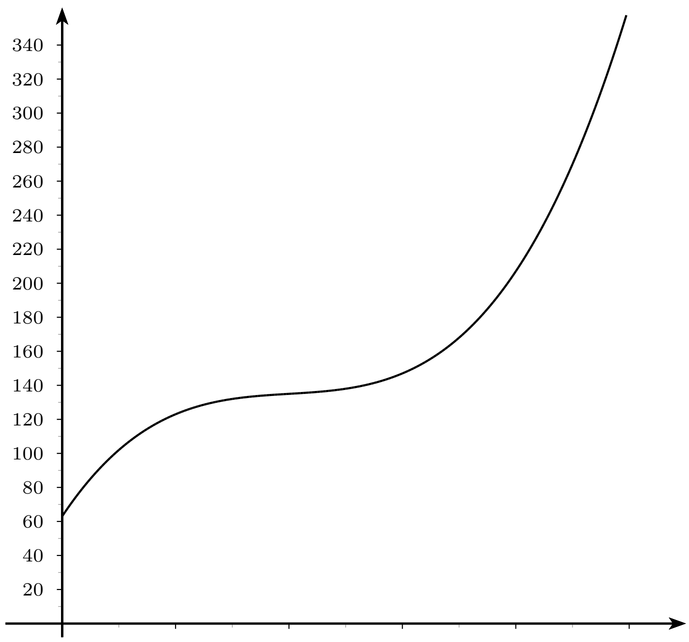
$I = \mathbb{R}, \quad k(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{3x} - 1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 3 & si\ x = 0 \end{cases}$ $\qquad I = \mathbb{R}_+, \quad l(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

Exercice 4 (Exercice appliqué à l'économie (d'après MATH@ES)).

Soit C_T la fonction définie pour tout réel x élément de l'intervalle $]0; 10]$ par

$$C_T(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 63.$$

La fonction C_T modélise sur l'intervalle $]0; 10]$ le coût total de production exprimé en milliers d'euros, où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués chaque jour. Elle est représentée ci-contre.



PARTIE A : *Étude du coût total*

1. *Par lecture graphique :*
   - (a) *sur quel intervalle la fonction C_T semble-t-elle convexe ? concave ?*
   - (b) *La courbe a-t-elle un point d'inflexion ?*
2. *On note C' la dérivée de la fonction C_T. (a) Calculer $C'(x)$. (b) Étudier les variations de C'. (c) Démontrer les résultats du 1.*

PARTIE B : *Étude du coût moyen*

On considère la fonction C_M définie sur l'intervalle $]0; 10]$ par $C_M(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}$. La fonction C_M mesure le coût moyen de production, exprimé en euros, par article fabriqué.

1. *Soit A le point d'abscisse a de la courbe (Γ).*
   - (a) *Montrer que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal au coût moyen $C_M(a)$*
   - (b) *Conjecturer à l'aide du graphique les variations de la fonction C_M*
2. *Le coût marginal, coût d'une unité supplémentaire produite est assimilé à la dérivée du coût total. Graphiquement, comparer le coût marginal et le coût moyen minimal.*
3. *On désigne par C'_M la dérivée de la fonction C_M.*
   - (a) *Calculer $C'_M(x)$.*
   - (b) *Montrer que l'équation $C'_M(x) = 0$ admet une solution unique α. Déterminer une approximation de α.*
   - (c) *Étudiez les variations de la fonction C_M.*
   - (d) *En déduire le prix de vente minimal, d'un article pour que l'entreprise ne travaille pas à perte ?*
4. *Justifier que lorsque le coût moyen est minimal, alors le coût moyen est égal au coût marginal.*

PARTIE C : *Rendements marginaux et d'échelles*

On dit que les rendements marginaux sont décroissants lorsque le coût marginal est croissant.

On dit que les rendements d'échelles sont décroissants lorsque le coût moyen est croissant.

Déterminer les valeurs à partir desquelles ces rendements deviennent décroissants.

Exercice 5.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = x\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$ *si* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 0$

1. *Montrer que* f *est continue sur* $\mathbb{R}$.
2. *Justifier que* f *est* C^1 *sur* $\mathbb{R}^\times$ *et calculer* $f'(x)$ *lorsque* $x \neq 0$
3. *Démontrer que* $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$. *En déduire que* f *est* C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *et calculer* $f'(0)$.

Exercice 6.

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

1. *Justifier que* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *expliciter* f'.
2. *Dresser le tableau de variations de* f *(limites incluses) et tracer dans un repère orthormée* $\mathcal{C}_f$.
3. *Montrer que* f *réalise une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur un intervalle à expliciter.*
4. *En quels points sa réciproque est-elle dérivable ?*
5. *Calculer* $(f^{-1})'(0)$, $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$ *et* $(f^{-1})'(-\frac{1}{4})$.
6. *Déterminer* $(f^{-1})'(x)$ *lorsque* f^{-1} *est dérivable en* x.
7. *Soit* $x \in f(\mathbb{R})$. *Déterminer son antécédent par* f. *En déduire* f^{-1}.
8. *Retrouver directement les résultats de la question* 4.
9. *Tracer dans le même repère que la question* 4 $\mathcal{C}_{f^{-1}}$

Exercice 7.

Soit f *la fonction définie* $\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = x\ln x$.

1. *Etudier les variations de* f.
2. *En déduire que* f *réalise une bijection de* $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right[$ *sur un intervalle* J *que à expliciter.*
3. *En quel point* f^{-1} *est-elle dérivable ?*
4. *Calculer* $(f^{-1})'(0)$, $f(e)$ *et* $f(e^2)$. *En déduire* $(f^{-1})'(e)$ *et* $(f^{-1})'(2e^2)$.
5. *Tracer dans un même repère orthonormé* $\mathcal{C}_f$ *et* $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.

Exercice 8.

Soit la suite u *définie par* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3u_n+1}$ *et* $u_0 \in \mathbb{R}_+$. *On pose* $f : x \mapsto \dfrac{2x}{3x+1}$.

1. (a) *Etudier les variations de* f *sur* $\mathbb{R}_+$ *et montrer que* $\forall x \geqslant \dfrac{1}{3}, \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$
   (b) *Déterminer le signe de* $f(x) - x$ *sur* $\mathbb{R}_+$ *ainsi que ses points fixes.*
   (c) *Montrer que* $[0, 1/3]$ *et* $[1/3, +\infty[$ *sont des intervalles stables par* f.
2. *On suppose dans cette question* $u_0 \in [1/3, +\infty[$.
   (a) *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 1/3$ *puis étudier la monotonie de la suite* u.

(b) En déduire sa convergence ainsi que sa limite.

(c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - 1/3| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - 1/3|$

(d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - 1/3| \leqslant \frac{1}{2^n} |u_0 - 1/3|.$

(e) On suppose $u_0 = 5$*. Comment choisir* n *pour être sûr que* $\left|u_n - \frac{1}{3}\right| \leqslant 10^{-4}$ *?*

Exercice 9.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}(2 - u_n^2)$*. On pose* $f : x \mapsto x + \frac{1}{4}(2 - x^2)$*.*

1. *(a) Etudier les variations de* f *et déterminer ses points fixes.*

   (b) Montrer que $\forall x \in [1, 2], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ *et que* $f([1, 2]) \subset [1, 2]$*.*

2. *(a) Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_n \leqslant 2$

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$*.*

   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ *et conclure.*

   (d) Déterminer un entier N *tel que, pour tout* $n \geqslant N$*,* $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant 10^{-9}$ *?*

Exercice 10.

Soit u *la suite définie par* $u_0 \in [3; 4]$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 4 - \frac{\ln u_n}{4}$*. On pose* $f(x) = 4 - \frac{\ln x}{4}$*.*

Données numériques *:* $f(4) \simeq 3.65 \pm 10^{-2}$ *et* $f(3) \simeq 3.72 \pm 10^{-2}$

1. *(a) Etudier la fonction* f *et montrer que l'intervalle* $[3; 4]$ *est stable par* f*.*

   (b) Montrer que f *possède un unique point fixe* L *sur l'intervalle* $[3; 4]$*.*

   (c) Montrer que : $\forall x \in [3; 4], \quad | f'(x) | \leqslant \frac{1}{10}$*.*

2. *(a) Vérifier que* $\forall n \geqslant 0, \quad |u_{n+1} - L| \leqslant \frac{1}{10} |u_n - L|$ *puis que* $|u_n - L| \leqslant \frac{1}{10^n}$*.*

   (b) Que peut-on dire de la convergence de la suite u *?*

   (c) En choisissant $u_0 = 3$*, déterminer un entier* N *tel que, pour tout* $n \geqslant N$*,* $| u_n - L | \leqslant 10^{-9}$*.*

Exercice 11.

1. *Montrer que l'équation* $x = 2 - 2e^{-x}$ *admet une unique solution* $r > 0$*. Vérifier que l'on a :* $1 \leqslant r \leqslant 2$*.*
2. *On considère la suite* u *définie par :* $u_0 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2 - 2e^{-u_n}$
   On introduit également la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = 2 - 2e^{-x}$

   (a) Justifier que $[1, r]$ *est stable par* f *et déterminer le signe de* $f(x) - x$ *sur* $[1, r]$

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [1, r]$ *et donner la monotonie de* u*.*

   (c) Justifier que la suite u *converge vers* r

3. *(a) A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - r| \leqslant \frac{2}{e} |u_n - r|$ *puis que* $|u_n - r| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^n$

   (b) Comment choisir n *pour que* $|u_n - r| \leqslant 10^{-9}$ *?*

Exercice 12.

On souhaite déterminer le nombre de solutions de $(E) : x^3 - 3x + 1 = 0$ *ainsi qu'une valeur approchée d'une des racines.*

1. *Montrer que l'équation* (E) *admet trois solutions réelles* α*,* β *et* γ *telles que* $\alpha < -1 < \beta < 1 < \gamma$

2. *Obtention d'approximation de β.*

   (a) *Justifier que $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$ et montrer que β est aussi solution de l'équation $\frac{x^3+1}{3} = x$*

   (b) *On introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x^3+1}{3}$.*
   Montrer que l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ est stable par g et que $\forall x \in [0, \frac{1}{2}], \quad |g'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$.
   On considère alors la suite u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n)$

   (c) *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0, \frac{1}{2}]$*

   (d) *Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \beta| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \beta|$ puis que $|u_n - \beta| \leqslant \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2}$.*

   (e) *Pour quelles valeurs de n est-on certain que $|u_n - \beta| \leqslant 10^{-9}$? En déduire une valeur approchée à 10^{-9} près de β.*

Exercice 13 (EML 2001)**.**

On considère l'application $f \ :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout x de $]0; +\infty[$, par : $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$

1. (a) *Calculer $f'(x)$*

   (b) *Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, \quad f''(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2)$*

   (c) *Etudier les variations de la fonction $g \ : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$, définie, pour tout x de $[0; +\infty[$, par :*

   $g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2$. En déduire : $\quad \forall x \in]0; +\infty[, \quad f''(x) > 0$.

   (d) *Dresser le tableau de variations de f (on admettra que $f'(x) \underset{x \to 0^+}{\to} -\frac{1}{2}$).*

3. *On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.*

   (a) *Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2} \quad$ et $\quad 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$*

   (b) *Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$.*

   (c) *Montrer : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \ln 2| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|$.*

   (d) *Etablir que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.*

Exercice 14.

Encadrer les nombres suivants à l'aide du théorème des accroissements finis : $A = \sqrt{10001} - 100, B = \frac{1}{0{,}99} - 1, C = \ln(1,01)$

Exercice 15.

1. *Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$: $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$*

2. *En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \ln(n+1)$.*

3. *Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.*

Exercice 16.

Prouver à l'aide d'arguments de convexité les inégalités suivantes :

(1) $\forall x \in [1\,;2], \ (x-1)\ln(2) \leqslant \ln(x) \leqslant x - 1 \qquad$ (2) $\forall x \in]0\,;1], \ x + 1 \leqslant \exp(x) \leqslant (e-1)x + 1$

Exercice 17.

1. *Montrer que la fonction $f \ : \ ]1\,; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ln(ln(x))$ est concave.*

2. *En déduire l'inégalité suivante :*

$$\forall (x;\ y) \in]1\,;+\infty[^2; ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

Exercice 18.

Soit f la fonction définie sur $[0\,;1[$ par $f(0)=0$ et, pour tout $x>0$, $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$.

1. *Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0\,;1[$.*
2. *Étudier les variations de f sur $[0\,;1[$.*
3. *Étudier la convexité de f sur $]0\,;1[$.*
4. *Montrer que f possède un unique point d'inflexion et déterminer la tangente de f en ce point.*
5. *Tracer l'allure de la courbe représentative de f.*

Pour aller plus loin

Exercice 19.

Soit $p>1$ un nombre entier. On définit la suite $(R_n)_{n\geqslant 1}$ par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k}.$$

Le but de cet exercice est de calculer la limite de la suite $(R_n)_{n\geqslant 1}$.

1. *Montrer que*

$$\forall x>0, \frac{1}{1+x} \leqslant \ln(1+x)-\ln(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$,

$$\ln(1+k)-\ln(k) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln(k)-\ln(k-1)$$

2. *Montrer que pour tout $n\geqslant 1$, $\ln\left(\dfrac{pn+1}{n+1}\right) \leqslant R_n \leqslant \ln p$*
3. *Conclure.*

Exercice 20.

Calculer la dérivée n-ième de

$$x\mapsto \frac{1}{1-x}, x\mapsto \frac{1}{1+x} \textit{ puis } x\mapsto \frac{1}{1-x^2}$$

Exercice 21.

Montrer que la dérivée d'ordre n de $x^{n-1}e^{1/x}$ est

$$(-1)^n x^{-(n+1)} e^{1/x}$$