

TD DU CHAPITRE 11

Exercice 1. 1. Par lecture graphique :

- (a) $f'(x) = 0$ pour $x = 3,7$ (intersection de $C_{f'}$ et O_x).
 - (b) $f''(x) = 0$ pour $x = 2,5$ (tangente horizontale à $C_{f'}$).
2. (a) C_1 représente f car elle possède une tangente horizontale au point d'abscisse 3,7 et C_2 représente la dérivée seconde f'' car elle coupe l'axe des abscisses pour $x = 2,5$.
- (b) En regardant C_2 , f est convexe pour $x > 2,5$ et concave pour $x < 2,5$ (signe de la dérivée seconde).
- (c) Les coordonnées du point d'inflexion de la courbe représentative de f sont $(2,5; -1,5)$ et une valeur approchée du coefficient directeur de la tangente en ce point est $-1,8$ (en regardant sur $C_{f'}$).

Exercice 2 (Étude de fonctions). 1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x} + x$ est C^∞ sur \mathbb{R} d'après les théorèmes généraux. On trouve $f'(x) = -e^{-x} + 1 \geq 0 \iff x \geq 0, f''(x) = e^{-x} > 0$ donc f est convexe sur \mathbb{R} . Enfin, $\lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$ et comme $f(x) = e^{-x}(1 + xe^x)$, on a, par composition et produit de limites et par croissances comparées pour le terme dans la parenthèse, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	↙ ↘	$+\infty$

2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 e^{-2x}$ est C^∞ sur \mathbb{R} d'après les théorèmes généraux. On trouve $g'(x) = e^{-2x}(2x - 2x^2) = e^{-2x}2x(1 - x) \geq 0 \iff x \in [0; 1], f''(x) = e^{-2x}(2 - 8x + 4x^2) \geq 0 \iff x \in]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ (avec $x_1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$), donc f est convexe sur chacun des intervalles de l'union, concave sur $[x_1; x_2]$ et possède deux points d'inflexion, aux points d'abscisses x_1 et x_2 . Enfin, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ par produit et, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, ce qui donne l'axe des abscisse comme asymptote à la courbe en $+\infty$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	$+\infty$	↘ ↗	e^{-1}	↘ ↗	0

3. $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x}{x}$ est C^∞ sur chaque intervalle de son ensemble de définition $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ d'après les théorèmes généraux. On trouve $h'(x) = \frac{e^x(x - 1)}{x^2} \geq 0 \iff x \geq 1$ et $h''(x) = \frac{e^x(x^3 - 2x^2 + 2x)}{x^4} = \frac{xe^x(x^2 - 2x + 2)}{x^4}$, du signe de x ($a > 0$ et $\Delta < 0$ pour le polynôme de degré 2). Donc f est concave sur $]-\infty; 0[$ et convexe sur $]0; +\infty[$ et ne possède aucun point d'inflexion. Enfin, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty$ par simple quotient de limites pour les trois dernières limites.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	-	0	+
$h(x)$	0	↘ ↗	e	$+\infty$

4. $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x^2}$ est C^∞ sur \mathbb{R} d'après les théorèmes généraux.
 On trouve $u'(x) = -2xe^{-x^2} \geq 0 \iff x \leq 0$ et $u''(x) = (-2 + 4x^2)e^{-x^2} \geq 0 \iff x \in]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$, en posant $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ et $x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Donc f est convexe sur chacun des intervalles de l'union précédente, concave sur $[x_1; x_2]$ et possède deux points d'inflexions d'abscisses x_1 et x_2 .
 Enfin, par composition de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$ donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe en $-\infty$ et en $+\infty$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$		$+$	$-$
$u(x)$	0	1	0

Exercice 3. 1. D'après les théorèmes généraux, a est continue sur \mathbb{R}_+ et C^1 sur \mathbb{R}_+^* .

De plus, pour $x > 0$, on trouve $a'(x) = \frac{e^{-x}(1-2x)}{2\sqrt{x}}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} a'(x) = +\infty$, ce qui montre, par le théorème de prolongement, que a n'est pas C^1 sur \mathbb{R}_+ .

2. D'après les théorèmes généraux, b est continue sur \mathbb{R}_+ et C^1 sur \mathbb{R}_+^* . De plus, pour $x > 0$, on trouve $b'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} b'(x) = +\infty$, ce qui montre, par le théorème de prolongement, que b n'est pas C^1 sur \mathbb{R}_+ .

3. D'après les théorèmes généraux, c est continue et C^1 sur \mathbb{R}_+^* . De plus, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0} c(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = 0 = c(0)$ donc c est continue sur \mathbb{R}_+ .

De plus, pour $x > 0$, on trouve $c'(x) = 2x \ln(x) + x$ donc, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0} c'(x) = 0$, ce qui montre, par le théorème de prolongement, que c est C^1 sur \mathbb{R}_+ et que $c'(0) = 0$.

4. D'après les théorèmes généraux, d est continue et C^1 sur \mathbb{R}_+^* . De plus, au voisinage de 0, le développement limité à l'ordre 1 donne $\ln(1+2x) = 0 + 2x + x\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ donc $\frac{\ln(1+2x)}{x} = 2 + \varepsilon(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} d(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 + \varepsilon(x) = 2 = d(0)$. Donc d est continue sur \mathbb{R}_+ .

De plus, pour $x > 0$, on trouve $d'(x) = \frac{2x}{1+2x} - \frac{\ln(1+2x)}{x^2} = \frac{2x - (1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)}$.

Pour voir si d est C^1 sur \mathbb{R}_+ , il faudrait par exemple utiliser développement limité à l'ordre 2 de $x \mapsto \ln(1+2x)$ qui est $\ln(1+2x) = 0 + 2x - 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$, ce qui permet d'obtenir $\lim_{x \rightarrow 0} d'(x) = -2$, donc d est C^1 sur \mathbb{R}_+ et $d'(0) = -2$. Mais tout ça, c'est du programme de ECE2...

5. D'après les théorèmes généraux, e est continue et C^1 sur \mathbb{R}_+^* . De plus, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0} e(x) = e^0 = 1$ donc e est continue sur \mathbb{R}_+ . De plus, pour $x > 0$, on trouve $e'(x) = (\ln(x) + 1) \exp(x \ln x)$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} e'(x) = -\infty$, ce qui montre, par le théorème de prolongement, que e n'est pas C^1 sur \mathbb{R}_+^* .

6. D'après les théorèmes généraux, f est continue sur $] -\infty, 1]$ et C^1 sur $] -\infty, 1[$ (car, par composition, on peut conclure lorsque la quantité sous la racine est strictement positive).

De plus, pour $x \in] -\infty, 1[$, $f'(x) = \sqrt{1-x} - \frac{x}{2\sqrt{1-x}}$ donc $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = -\infty$, ce qui montre, par le théorème de prolongement, que f n'est pas C^1 sur $] -\infty, 1]$.

7. D'après les théorèmes généraux, g est continue sur $[-1, 1]$ et C^1 sur $] -1, 1[$ (car, par composition, on peut conclure lorsque la quantité sous la racine est strictement positive).

De plus, pour $x \in] -1, 1[$, $g'(x) = -\sqrt{1-x^2} - \frac{(1-x)2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} - \frac{x\sqrt{(1-x)(1+x)}}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = -\sqrt{1-x^2} -$

$x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ donc $\lim_{x \rightarrow 1} g'(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -1} g'(x) = +\infty$, ce qui montre, par le théorème de prolongement, que g est C^1 au maximum sur $] -1, 1]$.

8. En posant $X = e^x$ et en remarquant que $e^{2x} - 2e^x + 3 = X^2 - 2X + 3 > 0$ sur \mathbb{R} car $a = 1 > 0$ et $\Delta = -8 < 0$, on peut conclure d'après les théorèmes généraux que h est C^1 sur \mathbb{R} (et même C^∞).

9. D'après les théorèmes généraux, i est continue sur $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ et C^1 sur $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ (car, par composition, on peut conclure lorsque la quantité sous la racine est strictement positive).

De plus, pour $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$, $i'(x) = \sqrt{x+x^2} + \frac{x(2x+1)}{2\sqrt{x+x^2}} = \sqrt{x+x^2} + \frac{(2x+1)}{2} \sqrt{\frac{x}{1+x}}$ donc

$\lim_{x \rightarrow -1} i'(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} i'(x) = 0$, ce qui montre, par le théorème de prolongement, que i est C^1 au maximum sur $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

10. D'après les théorèmes généraux, j est continue et C^1 sur \mathbb{R}_+^* .

De plus, pour $x > 0$, on a $j(x) = \frac{\sqrt{x}}{\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}$ donc, par quotient et limite classique, $\lim_{x \rightarrow 0} j(x) = 0 = j(0)$, donc j est continue sur \mathbb{R}_+ .

Pour $x > 0$, $j'(x) = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{x}}{e^x-1} + \frac{x\sqrt{x}e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\left(\frac{e^x-1}{x}\right)} \left[\frac{3}{2} + \frac{e^x}{\left(\frac{e^x-1}{x}\right)} \right]$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} j'(x) = +\infty$ par

produit et limite classique, ce qui montre, par le théorème de prolongement, que j n'est pas C^1 sur \mathbb{R}_+ .

11. D'après les théorèmes généraux, k est continue et C^1 sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^- .

Au voisinage de 0, le développement limité à l'ordre 1 de $x \mapsto e^{3x}$ donne $e^{3x} = 1 + 3x + x\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$, ce qui permet d'obtenir $k(x) = 3 + \varepsilon(x)$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = 3 = k(0)$ donc k est continue sur \mathbb{R} .

De plus, pour $x \neq 0$, $k'(x) = \frac{3e^{3x}x - (e^{3x} - 1)}{x^2}$. Là encore, le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto e^{3x}$ (qui est $e^{3x} = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$) permet de conclure que k est C^1 sur \mathbb{R} et que $k'(0) = \frac{9}{2}$.

12. D'après les théorèmes généraux, l est continue et C^1 sur \mathbb{R}_+^* .

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et que $l(x) = 1 \frac{\ln(1+x)}{x}$, on a bien $\lim_{x \rightarrow 0} l(x) = 0 = l(0)$ et l est continue sur \mathbb{R}_+ .

Pour $x > 0$, $l'(x) = \frac{-x + (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$ et le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$ (qui est $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$) permet de conclure que l est C^1 sur \mathbb{R}_+ et que $l'(0) = \frac{1}{2}$.

Exercice 5. On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

1. Comme $e^x - 1 > 0 \iff x > 0$, alors, la règle des signes (ou un tableau de signes) montre que $\frac{e^x-1}{x} > 0$ si $x \neq 0$ donc f est bien définie sur \mathbb{R} .

Ensuite, f est continue d'après les théorèmes généraux, sauf éventuellement en 0. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$, par composition de limites, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln(1) = 0 = f(0)$ donc f est continue sur \mathbb{R} .

2. f est C^1 sur \mathbb{R}^\times par les théorèmes généraux et, pour $x \neq 0$, $f'(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) + x \frac{x}{e^x-1} \frac{xe^x - (e^x-1)}{x^2} = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) + \frac{x}{e^x-1} \frac{xe^x - (e^x-1)}{x} = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) + \frac{x}{e^x-1} \left(e^x - \frac{(e^x-1)}{x}\right)$.

3. On a $\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x-1} \left(e^x - \frac{(e^x-1)}{x}\right) = 1(1-1) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$.

Exercice 6. On trouve facilement que f est définie et C^∞ sur \mathbb{R} (Th. gén.) et que $f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0$ donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} . On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, cette dernière s'obtenant par factorisation par e^x en haut et en bas.

f réalise donc une bijection de \mathbb{R} sur $]0; 1[$ par le théorème de la bijection et sa fonction réciproque est strictement croissante et dérivable sur \mathbb{R} car la dérivée ne s'annule jamais.

Enfin $(f^{-1})(0) = 0$ car $f(x) = 0 \iff e^x - 1 = 0 \iff x = 0$ donc $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 2$.

$(f^{-1})\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(3)$ car $f(x) = \frac{1}{2} \iff 2(e^x - 1) = e^x + 1 \iff x = \ln(3)$ donc $(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'(\ln(3))} = \frac{8}{9}$.

$(f^{-1})\left(-\frac{1}{4}\right) = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$ car $f(x) = -\frac{1}{4} \iff 4(e^x - 1) = -(e^x + 1) \iff x = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$ dc $(f^{-1})'\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{f'\left(\ln\left(\frac{5}{3}\right)\right)} = \frac{32}{25}$.

Enfin, Pour tout $y \in]0; 1[$, $f(x) = y \iff (e^x - 1) = y(e^x + 1) \iff e^x = \frac{1+y}{1-y} \iff x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = f^{-1}(y)$.

On trouve, pour tout $y \in]0; 1[$, $(f^{-1})'(y) = \frac{2}{(1-y)^2}$, ce qui permet de retrouver les résultats de la question 4

Exercice 7. C'est le même genre d'exercice que le précédent à deux différences près : f n'est pas monotone donc il faut choisir un intervalle sur lequel elle est strictement monotone (ici $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$) pour définir une bijection de cet intervalle sur son image $\left[-\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

Du coup, comme f' s'annule en $\frac{1}{e}$, f' est dérivable uniquement sur $\left]-\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

Enfin, il est impossible dans cet exercice d'explicitier la fonction réciproque mais on peut calculer pour certaines valeurs numériques en suivant le même plan.

$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(1)} = 1$ (car $f(1) = 1$), $(f^{-1})'(e) = \frac{1}{f'(e)} = \frac{1}{2}$ (car $f(e) = e$) et $(f^{-1})'(2e^2) = \frac{1}{f'(e^2)} = \frac{1}{3}$ (car $f(e^2) = 2e^2$).

Exercice 11. 1. Posons $g(x) = 2 - 2e^{-x} - x$ alors $x = 2 - 2e^{-x} = f(x) \iff g(x) = 0$.

g est C^1 sur \mathbb{R} et, pour tout réel x , $g'(x) = 2e^{-x} - 1 \leq 0 \iff x \leq \ln(2)$

De plus, on montre que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ par croissances comparées (factoriser par l'exponentielle pour faire propre), que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ et que $g(0) = 0$.

x	$-\infty$	0	$\ln(2)$	r	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	0	$1 - \ln(2)$	0	$-\infty$

Comme g continue sur \mathbb{R} , le théorème de la bijection appliqué deux fois montre que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution sur chacun des intervalles $]-\infty; \ln(2)]$ et $[\ln(2); +\infty[$.

Sur la partie de gauche, la solution est 0 et sur la partie de droite, la solution, notée r , est bien l'unique solution strictement positive de l'équation (c'est ce qu'il fallait montrer, l'énoncé n'est pas clair...)

Comme g est décroissante sur $[\ln(2); +\infty[$ et que $g(1) = 1 - \frac{2}{e} > 0$, que $g(2) = -\frac{2}{e^2} < 0$ et que $g(r) = 0$, on en déduit que $1 \leq r \leq 2$.

IL faut remarquer que r est un point fixe de f , par définition de f et de g .

2. On considère la suite u définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 - 2e^{-u_n}$

(a) f est strictement croissante sur \mathbb{R} car $f'(x) = 2e^{-x} > 0$ et $1 \leq r$ donc $1 \leq 2 - \frac{2}{e} = f(1) \leq f(r) = r$.
Donc, $[1, r]$ est stable par f $f(x) - x = g(x) \geq 0$ sur $[1, r]$ (voir la première question).

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, r]$ par une récurrence classique et comme, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$, on déduit de la question précédente que $u_{n+1} - u_n \geq 0$. La suite est donc croissante.

(c) Comme la suite est majorée par r , elle converge vers $\ell \in [1; r]$, et, par continuité de f et en passant à la limite dans la définition par récurrence, on obtient $f(\ell) = \ell$ donc $\ell = r$.

3. (a) Il faut ajouter à ce qui précède que f est C^1 sur $[1; r]$ et que, sur cet intervalle $|f'(x)| = 2e^{-x} \leq 2e^{-1} = \frac{2}{e}$. Le reste est classique IAF puis récurrence.
- (b) Il suffit pour cela de choisir n tel que $\left(\frac{2}{e}\right)^n \leq 10^{-9}$, ce qui donne $n \geq \frac{\ln(10^{-9})}{\ln\left(\frac{2}{e}\right)}$ qu'on peut calculer à l'aide d'une calculatrice. Ceci permet donc, en calculant le terme de la suite correspondant à ce rang n , de donner une valeur approchée à 10^{-9} près de r .

Exercice 12. On souhaite déterminer le nombre de solutions de $(E) : x^3 - 3x + 1 = 0$ ainsi qu'une valeur approchée d'une des racines.

1. La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 3x + 1$ est C^1 et $f'(x) = 3x^2 - 3 \geq 0 \iff x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$. On a $f(-1) = 3$ et $f(1) = -1$. On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			3		-1		$+\infty$

Il suffit donc d'appliquer trois fois le théorème de la bijection, une fois sur chacun des intervalles sur lesquels f est strictement monotone, comme $f(x)$ change de signe sur chacun des intervalles.

Donc (E) admet trois solutions réelles α, β et γ telles que $\alpha < -1 < \beta < 1 < \gamma$

2. Obtention d'approximation de β .

- (a) $f(0) = 1 \geq 0 = f(\beta)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} \leq 0 = f(\beta)$ et ces trois valeurs de départ appartiennent à l'intervalle $[-1; 1]$. Donc, comme f est strictement décroissante sur cet intervalle, on a bien $\beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Enfin, par manipulation algébrique classique (et facile) :

β est aussi solution de l'équation $\frac{x^3 + 1}{3} = x$

- (b) g est C^1 sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = x^2 > 0$ dès que $x \neq 0$. Donc g est strictement croissante sur \mathbb{R} et

$$g\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[g(0); g\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \left[\frac{1}{3}; \frac{3}{8}\right] \subset \left[0; \frac{1}{2}\right].$$

De plus, $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], |g'(x)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

- (c) Par récurrence classique, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

- (d) IAF+récurrence avec $|u_0 - \beta| \leq \frac{1}{2}$ car les deux valeurs sont dans l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

- (e) C'est comme dans l'exercice précédent...

Exercice 13. 1. (a) f est de classe C^1 en tout x tel que $e^x - 1 \neq 0$ donc sur $]0; +\infty[$. (quotient de fonctions C^1) et pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$.

- (b) f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions de classe C^2 et $\forall x \in]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(1-x-1)e^x(e^x-1)^2 - 2[(1-x)e^x-1](e^x-1)e^x}{(e^x-1)^4} \\ &= \frac{(e^x-1)[-xe^x(e^x-1) - 2[(1-x)e^x-1]e^x]}{(e^x-1)^4} \\ &= \frac{-xe^{2x} + xe^x - 2[e^{2x} - xe^{2x} - e^x]}{(e^x-1)^3} \\ &= \frac{e^x}{(e^x-1)^3} (xe^x - 2e^x + x + 2) \end{aligned}$$

(c) g est dérivable sur \mathbb{R} et $g'(x) = xe^x + e^x - 2e^x + 1 = (x - 1)e^x + 1$
 g' est dérivable sur \mathbb{R} et $g''(x) = e^x + (x - 1)e^x = xe^x$ d'où les variations et les signes :

x	0	+	$+\infty$
$g''(x)$	0	+	
$g'(x)$	0	↗ +	
$g(x)$	0	↗ +	

et pour f :

x	0	+	$+\infty$
$g(x)$	0	+	
$e^x - 1$	0	↗ +	
$f''(x)$	0	+	
$f'(x)$	-1/2	↗ -	0
$f(x)$	1	↘	0

(d) On admet que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2}$.

$$f'(x) = \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2} = \frac{xe^x [(-1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{xe^x}]}{e^{2x} (1 - 1/e^x)^2} = \frac{x [(-1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{xe^x}]}{e^x (1 - 1/e^x)^2}$$

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ par croissances comparées.

Comme f' est croissante et tend vers 0 en $+\infty$, elle est strictement négative et f est strictement décroissante sur \mathbb{R}^+

En $+\infty$: $f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x (1 - 1/e^x)} \rightarrow 0$ par croissances comparées.

2. (a) D'après les variations f on a $\forall x \in [0; +\infty[$, $0 \leq f(x) \leq 1$
 D'après les variations de f' , on a pour tout $x \in [0; +\infty[$, $-\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$ donc

$$\forall x \in [0; +\infty[, |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leq f(x) \leq 1$$

(b) On procède par équivalence pour résoudre l'équation : 0 n'est pas solution et pour $x \neq 0$

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{x}{e^x - 1} = x \\ &\Leftrightarrow 1 = e^x - 1 \quad \text{car } x \neq 0 \text{ et } e^x - 1 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow 2 = e^x \\ &\Leftrightarrow x = \ln(2) \quad \text{car exp est strictement croissante sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

donc $\ln(2)$ est l'unique solution de cette équation.

(c) On applique alors l'inégalité des accroissements finis :

On montre tout d'abord que pour tout entier n , $u_n \in [0 + \infty[$

Pour $n = 0$, $u_0 = 0 \in [0 + \infty[$

Soit $n \geq 0$ tel que $u_n \in [0 + \infty[$ alors, comme $f \geq 0$ sur $[0 + \infty[$, $f(u_n) \geq 0$ et $u_{n+1} \in [0 + \infty[$.

Donc pour tout entier n , $u_n \in [0 + \infty[$

De plus $\ln(2) \in [0 + \infty[$

Et $|f'| \leq \frac{1}{2}$ sur $[0 + \infty[$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \ln 2| = |f(u_n) - f(\ln 2)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln 2|$$

(d) On a alors par récurrence, pour tout entier n , $0 \leq |u_n - \ln(2)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Et par encadrement $u_n - \ln(2) \rightarrow 0$ et donc $u_n \rightarrow \ln(2)$

Exercice 14. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{10000 + x}$ est C^1 sur l'intervalle $[0; 1]$. Comme $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{10000 + x}}$ est décroissante, on a, sur cet intervalle $\frac{1}{201} \frac{1}{2\sqrt{10000 + 1}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{10000}} = \frac{1}{200}$.

Par conséquent, d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à l'intervalle $[0; 1]$, on obtient :

$$\frac{1}{201}(1 - 0) \leq f(1) - f(0) \leq \frac{1}{200}(1 - 0) \iff \frac{1}{201} \leq A \leq \frac{1}{200}$$

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est C^1 sur l'intervalle $[0; 0,01]$. Comme $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ est croissante, on a, sur cet intervalle $1 \leq f'(x) \leq \frac{1}{0,99^2} =$.

Par conséquent, d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à l'intervalle $[0; 0,01]$, on obtient :

$$1(0,01 - 0) \leq f(1) - f(0) \leq \frac{1}{0,99^2}(0,01 - 0) \iff \frac{1}{100} \leq B \leq \frac{100}{99^2} \approx \frac{1}{99}.$$

On peut aussi prendre $\frac{1}{x}$ comme fonction, il faut modifier l'intervalle en conséquence, et faire attention à l'hypothèse $a \leq b$ pour appliquer l'IAF.

Pour $C = \ln(1,01)$, $\ln(x)$ ou encore $\ln(1+x)$ permettent de reprendre le même schéma.

Exercice 15. 1. Soit $n \geq 1$. La fonction \ln est C^1 sur l'intervalle $[n; n+1]$.

$$\text{Sur cet intervalle, } \frac{1}{n+1} \leq \ln'(x) = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}.$$

Donc, d'après l'IAF : $\frac{1}{n+1}(n+1-n) \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}(n+1-n)$, ce qui donne la double inégalité demandée.

2. On a donc, en sommant les inégalités de droite de la question précédente : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1)$, la dernière égalité résultant d'un télescopage et de $\ln(1) = 0$.

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$, par comparaison de limites dans l'inégalité précédente (car il est clair que le membre de droite diverge vers $+\infty$)

Exercice 16.

(1) L'équation de la tangente à la courbe de \ln en 1 est $y = x - 1$ et \ln est concave donc pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a $\ln(x) \leq x - 1$, en particulier l'inégalité est vraie pour tout $x \in [1; 2]$.

Pour tout $x \in [1; 2]$, $x = t \times 1 + (1-t) \times 2$ avec $t = 2 - x \in [0; 1]$. En vertu de la concavité de \ln , on a $t \ln 1 + (1-t) \ln 2 \leq \ln x$, soit $(x-1) \ln 2 \leq \ln x$.

Donc $\forall x \in [1; 2]$, $(x-1) \ln(2) \leq \ln(x) \leq x - 1$.

(2) L'équation de la tangente à la courbe de \exp en 0 est $y = x + 1$ et \exp est convexe donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x + 1 \leq \exp(x)$, en particulier l'inégalité est vraie pour tout $x \in [0; 1]$.

Pour tout $x \in [0; 1]$, $x = t \times 1 + (1-t) \times 0$ avec $t = x \in [0; 1]$. En vertu de la convexité de \exp , on a $\exp(x) \leq t \exp(1) + (1-t) \exp(0)$, soit $\exp(x) \leq ex + 1 - x = (e-1)x + 1$.

Donc $\forall x \in]0; 1]$, $x + 1 \leq \exp(x) \leq (e-1)x + 1$.

Exercice 17.

1. La fonction f est de classe C^∞ sur $]1; +\infty[$ d'après les théorèmes généraux car \ln est strictement positive sur $]1; +\infty[$ et de classe C^∞ . On a $f''(x) = \left(\frac{1}{x \ln x}\right)' = -\frac{\ln x + 1}{(\ln x)^2}$. Comme $\ln x$ et $(\ln x)^2$ sont strictement positifs pour tout $x \in]1; +\infty[$, f'' est strictement négative sur $]1; +\infty[$. Donc f est concave.

2. Comme \ln est croissante, il suffit de montrer que

$$\forall (x; y) \in]1; +\infty[^2; \ln\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \geq \ln\left(\sqrt{\ln(x)\ln(y)}\right).$$

On a $\ln\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)$, $\ln\left(\sqrt{\ln(x)\ln(y)}\right) = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2}$ et $f\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) \geq \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2}$ car

f est concave. Il en résulte que $\forall (x; y) \in]1; +\infty[^2; \ln\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \geq \ln\left(\sqrt{\ln(x)\ln(y)}\right)$.

Donc $\forall (x; y) \in]1; +\infty[^2; \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$.

Exercice 18.

Soit f la fonction définie sur $[0; 1[$ par $f(0) = 0$ et, pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{\ln x}$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0; 1[$.

2. Étudier les variations de f sur $[0; 1[$.

3. Étudier la convexité de f sur $]0; 1[$.

4. Montrer que f possède un unique point d'inflexion et déterminer la tangente de f en ce point.

5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

Pour aller plus loin

Exercice 19.

Soit $p > 1$ un nombre entier. On définit la suite $(R_n)_{n \geq 1}$ par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k}.$$

Le but de cet exercice est de calculer la limite de la suite $(R_n)_{n \geq 1}$.

1. Montrer que

$$\forall x > 0, \frac{1}{1+x} \leq \ln(1+x) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$$

En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$,

$$\ln(1+k) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$$

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\ln\left(\frac{pn+1}{n+1}\right) \leq R_n \leq \ln p$

3. Conclure.

Exercice 20.

Calculer la dérivée n -ième de

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}, x \mapsto \frac{1}{1+x} \text{ puis } x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$$

Exercice 21.

Montrer que la dérivée d'ordre n de $x^{n-1}e^{1/x}$ est

$$(-1)^n x^{-(n+1)} e^{1/x}$$