**Exercice 1.**

*Calculer les sommes suivantes :*

$$A=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\qquad B=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\qquad C=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{(n+1)!}$$

$$D=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n-1}{n!}\qquad E=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n n^2}{3^n}\qquad F=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-n}$$

$$G=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4n-1}{3^n}\qquad H=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n^2-n+1}{n!}\qquad I=\sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

$$J=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+n+1}{2^n}\qquad K=\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+n-1)e^{-2n}\qquad L=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+2^n}{2^{2n}}$$

$$M=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1+2^n}{4^{n+1}}\qquad N=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2-n+3^n}{n!}\qquad J=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+n-(-2)^n}{3^n}$$

**Exercice 2.**

*Soit* $u_n=\dfrac{n^2}{(n-1)!}$ *et* $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k$.

1. *Déterminer* $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$ *tels que pour tout* $n\geqslant 3,\ u_n=\dfrac{a}{(n-3)!}+\dfrac{b}{(n-2)!}+\dfrac{c}{(n-1)!}$.
2. *En déduire que la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}$ *converge et donner sa somme.*

**Exercice 3.** *Soit* $p\in\,]0\,;1[$ *et* $q=1-p$. *Montrer que*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}pq^{n-1}=1\qquad\sum_{n=1}^{+\infty}npq^{n-1}=\frac{1}{p}\qquad\sum_{n=1}^{+\infty}n^2pq^{n-1}=\frac{q+1}{p^2}$.
2. *Soit* $\lambda\in\mathbb{R}$. *Montrer que :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}=1\qquad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}=\lambda\qquad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}=\lambda(\lambda+1).$$

**Exercice 4.**

*Considérons les trois suites suivantes :*

$$u_n=\ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right),\qquad v_n=\ln\left(\frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)}\right),\qquad w_n=\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

1. (a) *Écrire pour tout entier naturel* $u_n$ *sous la forme* $a_{n+1}-a_n$.
   (b) *En déduire que la série de terme* $u_n$ *converge et donner sa valeur.*
2. *Reprendre les questions précédentes avec* $v_n$ *et* $w_n$.

**Exercice 5.** *Pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$, *on pose* $u_n=\dfrac{(-1)^{n+1}n}{4n^2-1}$.

1. *Déterminer des réels* $a$, $b$ *et* $c$ *tels que* $\forall n\geqslant 1,\ \dfrac{n}{4n^2-1}=\dfrac{a}{2n+1}+\dfrac{b}{2n-1}$.
2. *En déduire que la série de terme général* $u_n$ *converge et calculer* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$.

**Exercice 6.**

*Pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$, *on pose* $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

1. *Déterminer des réels* $a$, $b$ *et* $c$ *tels que* $\forall n\geqslant 1,\ \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}+\dfrac{c}{n+2}$.
2. *En déduire que la série de terme général* $u_n$ *converge et calculer* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$.

**Exercice 7.**

*On considère la suite* $u_n = \ln(n+2) - 2\ln(n+1) + ln(n)$ *pour* $n \geqslant 1$.

1. *Donner, pour tout* $n \geqslant 1.$, *une expression simple de la somme partielle* $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
2. *En déduire la convergence de la série* $\sum_{n\geqslant 1}$ *ainsi que sa somme.*

**Exercice 8.** *On considère la suite* $(a_n)$ *définie par* $a_0 > 0$ *et par la relation suivante :*

$$\forall n \in \mathbb{N};\ a_{n+1} = a_n e^{-a_n}.$$

1. (a) *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$.
   (b) *Étudier le sens de variation de la suite* $(a_n)$.
   (c) *En déduire que* $(a_n)$ *converge et déterminer sa limite.*
2. (a) *On pose* $b_n = ln(a_n)$. *Calculer* $b_{n+1} - b_n$ *en fonction de* $a_n$.
   (b) *En déduire la nature de la série* $\sum a_n$

**Exercice 9.**

*Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par la donnée de* $u_0 \in ]0\,;1[$ *et par la relation suivante :*

$$\forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. (a) *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}, u_n \in ]0\,;1[$.
   (b) *Étudier la monotonie de la suite* $(u_n)$.
   (c) *En déduire que la suite* $(u_n)_{n\in N}$ *converge, et déterminer sa limite.*
2. *Montrer que la série* $\sum u_n^2$ *converge, et calculer sa somme en fonction de* $u_0$.
3. *Quelle est la nature de la série* $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ *?*

*partielle de rang n de cette série :*

**Exercice 10.**

1. *Démontrer les inégalités suivantes :*
   *(i)* $\forall x \in \mathbb{R};\ e^x \geqslant x$ *(ii)* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*;\ x \geqslant ln(x)$ *(iii)* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*;\ ln(x) \leqslant 2\sqrt{x}$
2. *En déduire la nature des séries suivantes :*
   *(i)* $\sum e^{-n^2}$ *(ii)* $\sum \frac{n + ln(n)}{\sqrt{n} + n^3}$ *(iii)* $\sum \frac{1}{ln(n)}$

**Exercice 11.**

*Considérons la série* $\sum \frac{1}{n}$ *et notons, pour tout entier* $n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=1} \frac{1}{k}$ *sa somme partielle de rang* $n$. *Nous allons montrer que cette série est divergente.*

1. *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*,\ S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$
2. *Supposons, par l'absurde, que la série* $\sum \frac{1}{n}$ *converge, c'est à dire que la suite des sommes partielles* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge vers un réel*

**Exercice 12.**

*On considère la série* $\sum \frac{1}{e^n + e^{-n}}$ *et on note* $S_n$ *la n-ième somme partielle de cette série.*

1. *Déterminer la monotonie de la suite* $(S_n)n \in \mathbb{N}$.
2. *Justifier que :* $\forall k \in \mathbb{N},\ \frac{1}{e^k + e^{-k}} \leqslant e^{-k}$.
3. *En déduire que :* $\forall n \in \mathbb{N}, S_n \leqslant \frac{1 - e^{-(n+1)}}{1 - e^{-1}}$.

4. *Montrer que la série* $\sum \frac{1}{e^n + e^{-n}}$ *converge et que :* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^n + e^{-n}} \leqslant \frac{e}{e-1}$

## Pour aller plus loin

**Exercice 13** (Oral HEC ***).

*Étudier suivant les valeurs du réel strictement positif* $\alpha$*, la nature de la série de terme général* $u_n$ *défini par*

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n^2+k)^\alpha}$$

**Exercice 14** (***).

*Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes strictement positifs convergentes. Montrer que les suivantes sont aussi convergentes*

$$\sum \min(u_n, v_n), \sum \max(u_n, v_n), \sum \sqrt{u_n v_n} \text{ et} \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$$

**Exercice 15** (***).

*Soit* $\sum a_n$ *une série à termes strictement positifs convergente.*

1. *Montrer que pour tout entier* $n \geqslant 2$ *on a :*

$$a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant 2a_n \Leftrightarrow a_n \geqslant \frac{1}{2^n}$$

*et*

$$a_n \leqslant \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

2. *En déduire que pour tout entier* $n \geqslant 2$ *on a :*

$$a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant max\left(2a_n,\ \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

3. *Établir la convergence de la série* $\sum a_n^{1-1/n}$ *(on peut utiliser l'exercice 14).*