Exercice 1

1.

1	2	3	\	\	\
2	1	3	4	\	\
3	4	1	2	6	\
4	3	5	2	\	\
5	4	6	\	\	\
6	5	3	\	\	\

2.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	2	3	2
2	1	0	1	1	2	2
3	1	1	0	1	2	1
4	2	1	1	0	1	2
5	3	2	2	1	0	1
6	2	2	1	2	1	0

On en déduit que le diamètre du graphe est 3

Exercice 2

Nous allons montrer qu'il n'existe aucun graphe simple dont tous les sommets ont des degrés distincts. Supposons qu'un tel graphe existe et qu'il possède n sommets. Le degré maximal d'un sommet est donc $n-1$. Si tous les degrés des sommets sont distincts, comme il y a n nombre différents dans $[[0; n-1]]$, alors on a donc nécessairement un sommet de degré 0, un sommet de degré 1, ..., un sommet de degré $n-1$. Du fait de la présence d'un sommet de degré 0, disons x_0. Mais il y a un sommet de degré $n-1$ ce qui est impossible. (en effet, celui-ci devrait être relié à tous les autres, y compris x_0). On obtient ainsi une contradiction.

Exercice 3

Notons n le nombre de pièces de cette maison.

Modélisons un graphe dans lequel chaque pièce et l'extérieur sont représentés par un sommet et chaque ouverture par une arête.

Les pièces ont un degré 4 puisqu'elles disposent de 4 ouvertures en tout.

L'extérieur a un degré $2n$ puisque chaque pièce a 2 ouvertures vers l'extérieur.

La somme des degrés est donc ici : $4n + 2n = 6n$. Le nombre d'arêtes est : 18 .

La formule d'Euler assure donc que : $6n = 2 \times 18$.

On en déduit que $n = 6$: cette maison possède 6 pièces.

Exercice 4

1. La matrice d'adjacence est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Pour savoir quel étudiant peut rendre visite au plus grand nombre d'amis en $2,5$ km, il suffit de savoir quelle ligne (ou colonne) de la matrice d'adjacence possède le plus de coefficients non nuls. C'est clairement la quatrième. Dès lors, l'étudiant habitant en D est celui qui peut rendre visite au plus grand nombre en un trajet de $2,5$ km.

3. (a) Pour savoir combien de boucles de 10 km l'étudiant habitant en A peut faire, il suffit de savoir combien de chaînes de longueur 4 relient le sommet A à lui-même.
Il est donc nécessaire de calculer les matrices A^2 et $A^4 = \left(A^2\right)^2$.

$$\text{On obtient : } A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } A^4 = \begin{pmatrix} 117 & 37 & 43 & 83 & 45 \\ 37 & 61 & 69 & 57 & 21 \\ 43 & 69 & 79 & 66 & 24 \\ 83 & 57 & 66 & 79 & 36 \\ 45 & 21 & 24 & 36 & 19 \end{pmatrix}.$$

On en conclut qu'il existe 117 boucles différentes de 10 km pour Anatole.
Remarque. Il suffisait de connaitre la 1^re ligne et la 1^re colonne de A^2 pour obtenir le résultat.

(b) Pour obtenir l'étudiant avec le plus faible nombre de boucles de 10 km, il suffit de regarder le coefficient diagonal de A^4 le plus petit : c'est celui en cinquième ligne. On en conclut donc que l'étudiant avec la plus faible quantité de boucles de 10 km est celui habitant en E.

Exercice 5

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. Dans A^2, on lit qu'il y a 3 chaînes de longueur 2 allant de a_1 vers a_1 à savoir $(a_1, a_3, a_1), (a_1, a_4, a_1), (a_1, a_5, a_1)$ et l'analogue avec a_2. Il n'y a aucune chaîne de longueur 2 entre a_1 ou a_2 d'une part et a_3 ou a_4 ou a_5 d'autre part. Au départ de a_3, il y a 2 chaînes vers lui-même et vers a_4 et a_n Au total, il y a 24 chaînes de longueur 2. C'est aussi la somme de tous les termes de A^2.
3. Dans A^3, on lit qu'il n 'y a aucune chaîne (cycle) de longueur 3 entre a_1 et lui-même. II y a 6 chaînes de longueur 3 entre, par exemple, a_1 et a_3. II s'agit de

$$(a_1, a_3, a_1, a_3), (a_1, a_4, a_1, a_3), (a_1, a_5, a_1, a_3), (a_1, a_3, a_2, a_3), (a_1, a_4, a_2, a_3), (a_1, a_5, a_2, a_3)$$

On a 6 chaînes analogues entre a_1 et a_4 et entre a_1 et a_5. Cela fait 18 chaînes de longueur 3 au départ de a_1, mais aucun cycle d'ordre 3 . C'est aussi la somme des éléments de la première ligne de A^3.

Exercice 6

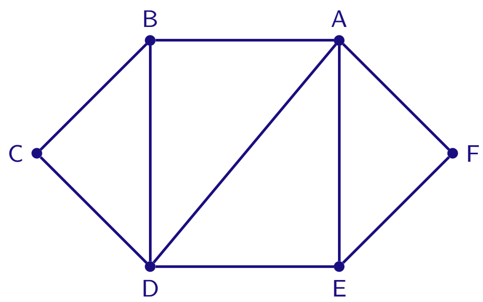
1. Il y a une chaîne contenant tous les sommets : B-F-D-E-C-A par exemple, donc le graphe est connexe.
2. Il y a exactement deux sommets de degré impair A et F. Comme le graphe est connexe il existe une chaîne eulérienne partant de l'un des deux et finissant à l'autre, par exemple la chaîne A-B-C-D-E-F
3. Comme il existe deux sommets de degré impair il n'existe pas de cycle eulérien.
Pour que tous les sommets soient de degré pair il suffit de rajouter un chemin de A à F. On aura alors un cycle eulérien.
4. On a $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Le terme correspondant à A et F est dans la première ligne et la sixième colonne ; il est égal à 5 nombre de chemins reliant A à F :
A-B-E-F ; A-C-B-F ; A-C-D-F ; A-C-E-F ; A-D-E-F.
6. Déterminer le degré de centralité et d'intermédiarité de F.

Exercice 7

partie a

Le graphe suivant modélise le plan d'une zone résidentielle. Les arêtes du graphe représentent les rues et les sommets du graphe les carrefours.

1. Donner l'ordre du graphe puis le degré de chacun des sommets.
2. Un piéton peut-il parcourir toutes ces rues sans emprunter plusieurs fois la même rue :
   (a) en partant d'un carrefour et en revenant à son point de départ ? Justifier la réponse.
   (b) en partant d'un carrefour et en arrivant à un carrefour différent ? Justifier la réponse.



partie b

Dans le graphe ci-contre, on a indiqué, pour cette même zone résidentielle, le sens de circulation pour les véhicules sur les différentes rues.

1. Expliquer pourquoi le sommet F représente une impasse.
2. Écrire la matrice M associée à ce graphe (on rangera les sommets dans l'ordre alphabétique)
3. En partant du carrefour C quel est le nombre minimal de rues qu'il faut emprunter pour arriver en E ?
4. Combien y-a-t-il de chemins de longueur 3 qui arrivent en F ?
5. Le graphe-est-il fortement connexe ?
6. déterminer le degré de centralité de A.