Espaces probabilisés - Généralisation

Exercice 1

1. E_1 : à partir du 5ème lancer, tous les lancers donnent pile.
   E_2 : les 4 premiers lancers donnent face et tous les suivants donnent pile.
   E_3 : au moins l'un des lancers à partir du 5ème donne pile.

2. On peut écrire $\displaystyle\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k$

3. (a) On a $B_n = \displaystyle\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$

   (b) On a $B_n = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k \right)$

Exercice 2

1. Il suffit de montrer que la puce est en B en des moments impairs car elle ne peut venir en C qu'à partir de B. Pour tout entier n, notons A_n l'événement la puce est en A à l'instant n et B_n l'événement la puce est en B à l'instant n et C_n l'événement la puce est en A à l'instant n. A_n, B_n et C_n forment un SCE
   Pour tout entier $n > 0$

$$B_{2n} = (A_{2n-1} \cap B_{2n}) \cup (B_{2n-1} \cap B_{2n}) \cup (C_{2n-1} \cap B_{2n}) = A_{2n-1} \cup \emptyset \cup \emptyset = A_{2n-1}$$

   Montrons maintenant que pour tout $n > 0$, $A_{2n-1} = \emptyset$ par récurrence.
   Initialisation : de manière évidente $A_1 = \emptyset$ car la puce est en B en l'instant 1.
   Hérédité : On a

$$A_{2n+1} = (A_{2n} \cap A_{2n+1}) \cup (B_{2n} \cap A_{2n+1}) \cup (C_{2n} \cap A_{2n+1}) = \emptyset \cup B_{2n} \cup \emptyset$$

   Or $B_{2n} = A_{2n-1} = \emptyset$ donc $A_{2n+1} = \emptyset$
   On a montré que pour tout $n > 0$, $A_{2n-1} = \emptyset$.
   Ainsi la puce n'est jamais en B en un instant pair. Elle est donc en des instants impairs en B. Or la puce qui arrive en C vient forcément de B, (on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n = B_{n-1} \cap C_n$).

2. L'événement E_n que la puce arrive en C pour la première fois à l'instant $2n$, $n \in \mathbb{N}^*$. est donnée par

$$E_n = A_0 \cap B_1 \cap A_2 \cap B_3 \cap ... \cap A_{2n-2} \cap B_{2n-1} \cap C_{2n} = \bigcap_{k=1}^{n} (A_{2k-2} \cap B_{2k-1}) \cap C_{2n}$$

$$P(E_n) = P(A_0)P_{A_0}(B_1)P_{A_0 \cap B_1}(A_2)...P_{A_0 \cap ... \cap A_{2n-2}}(B_{2n-1})P_{A_0 \cap ... \cap B_{2n-1}}(C_{2n})$$

$$P(E_n) = P(A_0)P_{A_0}(B_1)P_{B_1}(A_2)...P_{A_{2n-2}}(B_{2n-1})P_{B_{2n-1}}(C_{2n})$$

$$P(E_n) = 1 \times 1 \times 1/2 \times 1 \times ... \times 1/2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

   Il y a $2n + 1$ termes (instants de 0 à $2n$.)

3. $E = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_n$. Les événements E_n sont incompatibles, d'après le théorème de la limite monotone,

$$P(E) = \lim_{n \to +\infty} P(\cup_{k=1}^{n} E_k) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} P(E_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$$

Exercice 3

1. $P(C_2) = P(P_1P_2) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ et $P(C_3) = P(F_1P_2P_3) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$.
2. Avec le système complet d'événements (F_1, P_1P_2, P_1F_2) et par la formule des probabilités totales
$$P(C_n) = P_{F_1}(C_n)P(F_1) + P_{P_1F_2}(C_n)P(P_1F_2) + P_{P_1P_2}(C_n)P(P_1P_2)$$
On a $P_{F_1}(C_n) = P(C_{n-1})$ car une fois que l'on a tiré face au 1er lancer, alors on remet à 0 notre modèle et on n'est plus avec n lancers mais avec $n-1$ lancers (et toujours pour finir par pile-pile.)
De la même façon $P_{P_1F_2}(C_n) = P(C_{n-2})$ et $P_{P_1P_2}(C_n) = 0$ car $n \geqslant 2$.
On alors
$$P(C_n) = \frac{1}{3}P(C_{n-1}) + \frac{2}{9}P(C_{n-2})$$
3. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ récurrente d'ordre 2 définie par $u_2 = \frac{4}{9}$, $u_3 = \frac{4}{27}$. On a pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = P(C_n)$.
L'équation caractéristique est $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} = 0$ et a pour solutions $x_1 = -1/3$ et $x_2 = 2/3$ La suite a une expression de la forme,
$$u_n = \lambda\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \mu\left(\frac{2}{3}\right)^n$$
Avec les valeurs de u_2 et u_3 on trouve que $\lambda = 4/3$ et $\mu = 2/3$.
4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} P(C_n) = \frac{4}{3} \times \frac{1}{9}\frac{1}{1-(-\frac{1}{3})} + \frac{2}{3} \times \frac{4}{9}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$. On en déduit que l'événement obtenir Pile-Pile est presque sûr.

Exercice 4

1. Écrire l'événement $\bar{B} = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$, puis $B = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$, et $B = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n$.
2. Tout d'abord pas l'indépendance des tirages (avec remise), on :
$P(A_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ puis $P(B_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\frac{1}{3}$ et $P(C_n) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
   - ⋆ Avec la première écriture, la suite d'événements (A_n) étant décroissante $(A_{n+1} \subset A_n)$ on a par le théorème de la limite monotone, sachant que $\frac{2}{3} \in]-1;1[$.
   $$P(\bar{B}) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$$
   On en déduit que $P(B) = 1$.
   - ⋆ Comme les B_n sont incompatibles, on a
   $$P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$$
   - ⋆ La suite d'événements (C_n) étant croissante $(C_n \subset C_{n+1})$, on a par le théorème de la limite monotone,sachant que $\frac{2}{3} \in]-1;1[$:
   $$P(B) = \lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 1$$

Exercice 5

1. (a) Il s'agit d'une suite décroissante $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n \geqslant 2$.

   (b) $A = \bigcap_{n=2}^{+\infty} A_n$

2. (a) Si U_k est l'événement la boule tirée dans l'urne U_k est blanche alors par indépendance des tirages et comme $A_n = \bigcap_{k=1}^{n} U_k$. alors $P(A_n) = P(\bigcap_{k=1}^{n} U_k) = \prod_{k=1}^{n} P(U_k) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n}$

   (b) D'après le théorème de la limite monotone $P(A) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

3. (a) Initialisation : $P(A_2) = P(U_2) = \frac{2^2-1}{2^2} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2\times 2}$.
   Hérédité : Les tirages étant indépendants, les urnes sont différentes, $P(A_{n+1}) = P(U_{n+1} \cap A_n) = P(U_{n+1}) \times P(A_n) = \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} \times \frac{n+1}{2n} = \frac{n+2}{2(n+1)}$.
   On a montré par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 2$: $P(A_n) = \frac{n+1}{2n}$.

   (b) D'après le théorème de la limite monotone $P(A) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Exercice 6

1. Pour tout entier $i \geqslant 1$, $P(A_i) = \left(\frac{k}{n}\right)^i$.

2. La suite d'événements (A_i) est une suite décroissante et $\lim_{i\to+\infty} P(A_i) = 0$ donc $P\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{i\to+\infty} P(A_i) = 0$.

   On peut écrire $A = \overline{\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i}$ donc $P(A) = 1 - \lim_{i\to+\infty} P(A_i) = 1 - 0 = 1$. L'événement " on obtient au moins une boule blanche " est presque sûr.

Exercice 8

1) Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ on note S_i l'événement « le dé amène le 6 au i-ème lancer »et A_n « le dé est lancé au moins n fois ». On a $P(A_1) = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $P(A_n) = P(\overline{S_1} \cap \cdots \cap \overline{S_{n-1}}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$. Cette dernière formule reste vraie pour $n = 1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$.

2) Pour tout $k \in [\![1\,;5]\!]$, on note B_n^k l'événement « le dé numéro k amène 6 en au plus n relances ».
On a $B_n = B_n^1 \cap \cdots \cap B_n^5$ et par indépendance $P(B_n) = P(B_n^1) \times \cdots \times P(B_n^5)$. Or $P(B_n^1) = \cdots = P(B_n^5)$. Donc $P(B_n) = \left(P(B_n^1)\right)^5$.
Calculons $P(B_n^1)$.

On a $\overline{B_n^1}$=« le dé numéro 1 est lancé au moins $n+2$ fois », donc il découle de 1) que $P(\overline{B_n^1}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}$ et alors $P(B_n^1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}$. Il en résulte que $P(B_n) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}\right)^5$.

3) On a $B = \bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite d'événement $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc, d'après le théorème de la limite monotone $P(B) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}\right)^5 = 1$. Donc on est presque sûr d'avoir que des 6.

Variables aléatoires discrètes

Exercice 12

On considère une variable aléatoire $X(\Omega) = [\![0\,;4]\!]$. On donne :

$$P([X=0]) = \frac{1}{10},\ P([X=1]) = \frac{1}{4} \text{ et } P([X=2]) = \frac{1}{2}$$

1. Sachant que les événements $[X=3]$ et $[X=4]$ sont équiprobables, déterminons $P([X=3])$. On a $\sum_{i=0}^{4} P([X=i]) = 1$ et $P([X=3]) = P([X=4])$, donc $\sum_{i=0}^{2} P([X=i]) + 2P([X=3]) = 1$. On a $\sum_{i=0}^{2} P([X=i]) = \frac{17}{20}$, donc $P([X=3]) = \frac{3}{40}$.
2. Calculons l'espérance et la variance de X.
   $E(X) = 0\times P([X=0]) + 1\times P([X=1]) + 2\times P([X=2]) + 3\times P([X=3]) + 4\times P([X=4]) = 0 + \frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{40} + \frac{12}{40} = \frac{10+40+9+12}{40} = \frac{71}{40}$.
   $E(X^2) = 0^2 \times P([X=0]) + 1^2 \times P([X=1]) + 2^3 \times P([X=2]) + 3^2 \times P([X=3]) + 4^2 \times P([X=4]) = 0 + \frac{1}{4} + 2 + \frac{27}{40} + \frac{48}{40} = \frac{10+80+27+48}{40} = \frac{165}{40} = \frac{33}{8}$. On a $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{165}{40} - \frac{71^2}{40^2} = \frac{1559}{1600}$.
3. Déterminer une expression de la fonction de répartition F_X de X et tracer sa courbe représentative.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
   $F_X(x) = 0$ si $x \in]-\infty\,;0[$, $F_X(x) = \frac{1}{10}$ si $x \in [0\,;1[$, $F_X(x) = \frac{7}{20}$ si $x \in [1\,;2[$, $F_X(x) = \frac{17}{20}$ si $x \in [2\,;3[$, $F_X(x) = \frac{37}{40}$ si $x \in [3\,;4[$ et $F_X(x) = 1$ si $x \in [4\,;+\infty[$,

Exercice 13

1.

x	-1	0	2
$F_X(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1

2. $E(X) = -1 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$
   $V(X) = -1 \times \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{6}\right)^2 + 0 \times \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{6}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{17}{72}$
3.

Y	0	1	4
$P(Y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

Exercice 14

Soit α un réel et X une variable aléatoire discrète telle que :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, P([X=k]) = \frac{\alpha}{k!}.$$

Déterminons α puis calculer l'espérance de X.

On a $1 = \sum_{k=0}^{+\infty} P([X = k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha}{k!} = \alpha \mathrm{e}$, donc $\alpha = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n} kP([X = k]) = \sum_{k=0}^{n} k\frac{\alpha}{k!} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{\alpha}{k!} = \alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!}$ et avec un changement d'indice on a $\sum_{k=0}^{n} kP([X = k]) = \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}$. Or $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}$, donc $E(X)$ existe et on a $E(X) = \alpha\mathrm{e} = 1$.

Exercice 20

1. (a) Si on veut $(X \geqslant i)$ pour tout $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$, on veut des numéros $\geqslant i$, alors on ne peut choisir que les numéros allant de i à 3 (il y en a $3 - i + 1 = 4 - i$).
   Ainsi, les tirages étant indépendants (car avec remise), on a :
   $$P(X \geqslant i) = \left(\frac{4-i}{3}\right)^n$$
   On en déduit alors la loi de X :
   $$\forall i \in \{1, 2, 3\}, P(X = i) = P(X \geqslant i) - P(X \geqslant i + 1) = \left(\frac{4-i}{3}\right)^n - \left(\frac{3-i}{3}\right)^n$$
   (b) Si on veut $(Y \leqslant j)$ pour tout $j \in \{1,\ 2,\ 3\}$, c'est à dire le plus grand des numéros doit être $\leqslant j$, alors on ne peut choisir que les numéros allant de 1 à j (il y en a j).
   Ainsi, les tirages étant indépendants (car avec remise), on a :
   $$P(Y \leqslant j) = \left(\frac{j}{3}\right)^n$$
   On en déduit alors la loi de Y :
   $$\forall j \in \{1, 2, 3\}, P(Y = j) = P(Y \leqslant j) - P(Y \leqslant j - 1) = \left(\frac{j}{3}\right)^n - \left(\frac{j-1}{3}\right)^n$$

2. On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise, jusqu'à obtenir pour la première fois un numéro déjà tiré. On note alors Z le rang de ce dernier tirage.
   a) $Z(\Omega) = [[2; 4]]$. On a bien sur, $P(Z = 1) = 0$.
   Si on note X_1 le numéro de la boule lors du premier tirage, $X_1 = 1$, $X_1 = 2$ et $X_1 = 3$ forment un système complet d'événements. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
   $$P(Z = 2) = P_{X_1=1}(Z = 2)P(X_1 = 1) + P_{X_1=2}(Z = 2)P(X_1 = 2) + P_{X_1=3}(Z = 2)P(X_1 = 3)$$
   Or $P_{X=i}(Z = 2) = \frac{1}{3}$ pour $i = 1, 2$ ou 3. En effet, il y a une chance sur 3 qu'on ait le même numéro au deuxième tirage.
   $$P(Z = 2) = P_{X_1=1}(Z = 2)P(X_1 = 1) + P_{X_1=2}(Z = 2)P(X_1 = 2) + P_{X_1=3}(Z = 2)P(X_1 = 3)$$
   $$P(Z = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$
   $(Z = 4)$ signifie qu'on tire lors des trois premiers tirages 3 numéros différents, il y a 6 triplets avec numéros différents sur les 27 triplets possibles. Soit $P(Z = 4) = \frac{6}{27}$.
   Donc $P(Z = 3) = 1 - P(Z = 2) - P(Z = 3) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{6}{27} = \frac{12}{27}$
   b) $E(Z) = 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{12}{27} + 4 \times \frac{6}{27} = \frac{26}{9}$
   $E(Z^2) = 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{12}{27} + 4^2 \times \frac{6}{27} = \frac{80}{9}$ $V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = \frac{240}{27} - \left(\frac{26}{27}\right)^2 = \frac{44}{81}$

Exercice 22

1. Si pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note P_k^A et F_k^A les événements la pièce A donne respectivement "pile" et "face" au kième tirage,
$$P(X = k) = P(P_1^A \cap P_2^A \cap .... \cap P_{k-1}^A \cap F_k^A)$$
Par indépendance, $P(X = k) = P(P_1^A \cap P_2^A \cap .... \cap P_{k-1}^A \cap F_k^A) = a^{k-1}(1-a)$.
De la même façon $P(Y = k) = P(P_1^A \cap P_2^A \cap .... \cap P_{k-1}^A \cap F_k^A) = b^{k-1}(1-b)$.

2. $(X = Y) = \cup_{k=1}^{+\infty}(X = k \cap Y = k)$, par incompatibilité et indépendance
$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty}(1-a)(1-b)(ab)^{k-1}$$
$$P(X = Y) = (1-a)(1-b)\sum_{k=0}^{+\infty}(ab)^k = (1-a)(1-b)\frac{1}{1-ab} = \frac{(1-a)(1-b)}{1-ab}.$$

3. $P(X > n) = 1 - P(X \leqslant n) = 1 - \sum_{k=1}^{n}(1-a)a^{k-1} = 1 - (1-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k = 1 - (1-a)\frac{1-a^n}{1-a} = a^n.$

4. $P(X > Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_{(Y=n)}(X > Y) \times P(Y = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X > n) \times P(Y = n =) \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \times (1-b)b^{n-1} = a(1-b)\sum_{n=0}^{+\infty}(ab)^{n-1} = a(1-b)\frac{1}{1-ab}.$

5. $P(X \geqslant Y) = P(X = Y) + P(X > Y) = \frac{(1-a)(1-b)}{1-ab} + a(1-b)\frac{1}{1-ab} = \frac{1-b}{1-ab}.$

Chaîne de Markov

Exercice 23

1. (a) $(X_n = 1), (X_n = 2), (X_n = 3), (X_n = 4)$ forment un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :
$$P(X_{n+1} = 1) = P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) + P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) + P_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 1) + P_{(X_n=4)}(X_{n+1} = 1)$$
Pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, sachant le pion sur un sommet i, il y a une $\frac{1}{3}$ qu'il atteigne le sommet j, $j \neq i$ et il ne peut atteindre le sommet i s'il est en i donc
$$P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 2) + \frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3}P(X_n = 4)$$

(b)
$$(X_n = 1), (X_n = 2), (X_n = 3), (X_n = 4)$$
forment un système complet d'événements,
$$P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$$
Mais
$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}(P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$$
Ainsi
$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}P(X_n = 1)$$

(c) La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = P(X_n = 1)$.
On a $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}u_n$. C'est une suite arithmético-géométrique, dont une étude donne son expression en fonction de n :

$$\forall n \in \mathbb{N} u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}.$$

Alors pour tout entier naturel n, $P(X_n = 1) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}$

2. En procédant de la même manière qu'à la question précédente,on obtient

$$P(X_n = 2) = P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}$$

3. $E(X_n) = 1 \times P(X_n = 1) + 2 \times P(X_n = 2) + 3 \times P(X_n = 3) + 4 \times P(X_n = 4)$

$$E(X_n) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4} + (2+3+4)\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}\right) = \frac{10}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$