Exercice 1

a) On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n!}=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}-1$ et $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}=e$. Donc $A=e-1$

b) On a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n!}-1$ et $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n!}=e^{-1}$. Donc $B=e^{-1}-1$

c) On a

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{3^n}{(n+1)!}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{N}\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N+1}\frac{3^n}{n!}\text{ (Changement d'indice) }=\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{N+1}\frac{3^n}{n!}-1\right)\text{ et }\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N+1}\frac{3^n}{n!}=e^3.$$

Donc $C=\dfrac{e^3-1}{3}$

d) On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{3n-1}{n!}=3\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n-1)!}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n!}$

$\displaystyle=3\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{n!}-\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}+1$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e$.

Donc $D=3e-e+1$, soit $D=2e+1$

e) On a $\dfrac{(-1)^n}{3^n}n^2=n^2q^n$ avec $q=-\dfrac{1}{3}$.

On a $n^2q^n=(n(n-1)+n)q^n=n(n-1)q^n+nq^n=q^2n(n-1)q^{m-2}+qnq^{n-1}$.

Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}n^2q^n=q^2\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)q^{n-2}+q\sum_{n=0}^{+\infty}nq^{n-1}$ (Combinaison linéaire de sommes de séries convergentes).

Soit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}n^2q^n=\frac{2q^2}{(1-q)^3}+\frac{q}{(1-q)^2}=\frac{2q^2+q(1-q)}{(1-q)^3}=\frac{q(q+1)}{(1-q)^3}$

Pour $q=-\dfrac{1}{3}$ on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}n^2\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{-\frac{1}{3}(-1/3+1)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^3}=\frac{-1/3\times 2/3}{4^3/3^3}=-\frac{3\times 2}{4^3}=-\frac{3}{32}$

Donc $E=-\dfrac{3}{32}$

f) On a $e^{-n}=\left(\dfrac{1}{e}\right)^n$, donc $F=\dfrac{1}{1-\frac{1}{e}}=\dfrac{e}{e-1}$

g) On a $\dfrac{4n-1}{3^n}=\dfrac{4}{3}n\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$. Donc $G=\dfrac{4}{3}\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}-\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{4}{3}\dfrac{3^2}{2^2}-\dfrac{3}{2}$, soit $G=\dfrac{3}{2}$.

h) On a $\dfrac{2n^2-n+1}{n!}=\dfrac{2(n(n-1)+n)-n+1}{n!}=\dfrac{2n(n-1)+n+1}{n!}$

Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{2n^2-n+1}{n!}=\sum_{n=0}^{N}\frac{2n(n-1)}{n!}+\sum_{n=0}^{N}\frac{n}{n!}+\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}$

$\displaystyle=\sum_{n=2}^{N}\frac{2}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}=\sum_{n=0}^{N-2}\frac{2}{n!}+\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{n!}+\sum_{n=0}\frac{1}{n!}=2\sum_{n=0}^{N-2}\frac{1}{n!}+\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{n!}+\sum_{n=0}\frac{1}{n!}$.

Donc $H=2e+e+e=4e$.

i) On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{N+1}-\sqrt{0}$ (Télescopage).

Donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=+\infty$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ diverge.

j) On a $\dfrac{n^2+n+1}{2^n}=\dfrac{n(n-1)+n+n+1}{2^n}=\dfrac{n(n-1)}{2^n}+\dfrac{2n}{2^n}+\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1}{2^2}n(n-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}+n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{2^n}$.

Donc $J=\dfrac{1}{2^2}\dfrac{2}{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^3}+\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2}+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{2^4}{2^2}+2^2+2$. Soit $J=10$.

k) On a $\left(n^2+n-1\right)e^{-2n}=(n(n-1)+n+n-1)\left(e^{-2}\right)^n=\left(e^{-2}\right)^2 n(n-1)\left(e^{-2}\right)^{n-2}+2n\left(e^{-2}\right)^{n-1}\times e^{-2}$

Donc $K=\dfrac{2\left(e^{-2}\right)^2}{\left(1-e^{-2}\right)^3}+\dfrac{2e^{-2}}{\left(1-e^{-2}\right)^2}=\dfrac{2\left(e^{-2}\right)^2+2e^{-2}\left(1-e^{-2}\right)}{\left(1-e^{-2}\right)^2}$

Donc $K=\dfrac{2e^{-2}}{\left(1-e^{-2}\right)^3}=\dfrac{2e^4}{\left(e^2-1\right)^3}$

l) On a $\dfrac{n^2+2^n}{2^{2n}}=\dfrac{n^2}{4^n}+\dfrac{1}{2^n}=n^2\left(\dfrac{1}{4}\right)^n+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

On a établi que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}n^2q^n=\frac{q(q+1)}{(1-q)^3}$ (voir e)).

Donc $L=\dfrac{1/4(1/4+1)}{(1-1/4)^3}+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{5/4^2}{3^3/4^3}+2=\dfrac{20}{27}+2$. Soit $L=\dfrac{74}{27}$

Exercice 2

1. $\forall n\geqslant 3, u_n=\dfrac{a}{(n-3)!}+\dfrac{b}{(n-2)!}+\dfrac{c}{(n-1)!}$
   $\Leftrightarrow \forall n\geqslant 3, \Rightarrow \dfrac{n^2}{(n-1)!}=\dfrac{a(n-1)(n-2)+b(n-1)+c}{(n-1)!}$
   $\Leftrightarrow \forall n\geqslant 3, n^2=3n^2+b$
   $an^2+(-3a+b)n+2a-b+c$
2. On a $S_n=\sum_{k=1}^n u_k=\displaystyle\sum_{k=3}^n u_k+u_1+u_2=\sum_{k=3}^n\left(\frac{1}{(k-3)!}+\frac{3}{(k-2)!}+\frac{1}{(k-1)!}\right)+1+4=\sum_{k=3}^n\frac{1}{k-3)!}+$ $\displaystyle 3\sum_{k=3}^n\frac{1}{k-2)!}+\sum_{k=3}^n\frac{1}{(k-1)!}+5=\sum_{k=0}^{n-3}\frac{1}{k!}+3\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k!}+\sum_{k=2}^{m-1}\frac{1}{k!}+5=\sum_{k=0}^{n-3}\frac{1}{k!}+3\left(\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}-1\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}-2=$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-3}\frac{1}{k!}+3\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}$
   Par passage a la limite on obtient.
   $$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n u_k=5\mathrm{e}$$

Exercice 11

1. On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_{2n}-S_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\geqslant\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$.
2. Supposons, par l'absurde, que la série $\sum\dfrac{1}{n}$ converge, c'est à dire que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel.
   On a, d'après 1), pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_{2n}-S_n\geqslant\dfrac{1}{2}$. Par passage à la limite on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_{2n}-S_n\geqslant\frac{1}{2}$ qui est impossible car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(S_{2n}-S_n)=\lim_{n\to+\infty}S_{2n}-\lim_{n\to+\infty}S_n=0$.
   Donc la série "harmonique" $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}$ diverge.

Exercice 12

On considère la série $\sum \dfrac{1}{e^n + e^{-n}}$ et on note S_n la n-ième somme partielle de cette série.

1. $\sum \dfrac{1}{e^n + e^{-n}}$ est une série à termes strictement positifs, donc sa suites de somme partielles est strictement croissante.
2. On a $\forall k \in \mathbb{N},\ e^k + e^{-k} \geqslant e^k$ car $e^{-k} \geqslant 0$. Le passage par l'inverse donne
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \frac{1}{e^k + e^{-k}} \leqslant \frac{1}{e^k} = e^{-k}.$$
3. On a $\forall k \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{e^k + e^{-k}} \leqslant e^{-k} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^k$, donc $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{e}\right)^k = \frac{1 - e^{-(n+1)}}{1 - e^{-1}}$
4. La série $\sum \dfrac{1}{e^n + e^{-n}}$ converge par comparaison avec la série géométrique $\sum \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$. Par passage à la limite dans l'inégalité de la question 3) on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^n + e^{-n}} \leqslant \lim_{N \to +\infty} \frac{1 - e^{-(N+1)}}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e-1}$.

Pour aller plus loin

Exercice 13

Étudier suivant les valeurs du réel strictement positif α, la nature de la série de terme général u_n défini par
$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n^2 + k)^\alpha}$$

On a pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\dfrac{1}{(2n^2)^\alpha} = \dfrac{1}{(n^2 + n^2)^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{(n^2 + k)^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{(n^2)^\alpha}$, soit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n^2)^\alpha} \leqslant u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n^2)^\alpha}$.

Donc pour tout $\in \mathbb{N}^*$, on a
$$\frac{1}{2^\alpha n^{2\alpha - 1}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^{2\alpha - 1}}.$$

Or la série $\sum \dfrac{1}{n^{2\alpha - 1}}$ converge si, et seulement, si $2\alpha - 1 > 1$, c'est à dire, $\alpha > 1$. Il découle alors des théorèmes de comparaison que la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Exercice 14

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes. Montrer que les suivantes sont aussi convergentes
$$\sum \min(u_n, v_n), \sum \max(u_n, v_n), \sum \sqrt{u_n v_n} \text{ et } \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$$

Montrons que pour tout $(x,\ y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\dfrac{xy}{x+y} \leqslant \min(x,\ y) \leqslant \sqrt{xy} \leqslant \max(x,\ y) \leqslant x + y$.

En effet, on a $\dfrac{y}{x+y} \leqslant 1 \Rightarrow \dfrac{xy}{x+y} = x\dfrac{y}{x+y} \leqslant x \times 1 = x$ et $\dfrac{x}{x+y} \leqslant 1 \Rightarrow \dfrac{xy}{x+y} = y\dfrac{x}{x+y} \leqslant y \times 1 = y$. Donc $\dfrac{xy}{x+y} \leqslant \min(x,\ y)$.

De plus on a :

$(\min(x,\ y))^2 = \min(x,\ y) \times \min(x,\ y) \leqslant xy \leqslant (\max(x,\ y))^2 \Rightarrow \min(x,\ y) \leqslant \sqrt{xy} \leqslant \max(x,\ y)$,

et comme $\max(x,\ y) = x$ ou $\max(x,\ y) = y$, on a $\max(x,\ y) \leqslant x + y$.

En remplaçant x et y par u_n et v_n on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{u_n v_n}{u_n + v_n} \leqslant \min(u_n,\ v_n) \leqslant \sqrt{u_n v_n} \leqslant \max(u_n,\ v_n) \leqslant u_n + v_n \tag{1}$$

Comme $\sum u_n + v_n$, il résultent de (1) et du théorème de comparaison sur les séries à termes positifs que les séries $\sum \min(u_n, v_n)$, $\sum \max(u_n, v_n)$, $\sum \sqrt{u_n v_n}$ et $\sum \dfrac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ convergent .

Exercice 15

Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs convergente.

1. Montrons que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a :
$$a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant 2a_n \Leftrightarrow a_n \geqslant \frac{1}{2^n}$$
En effet, on a :
$a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant 2a_n \Leftrightarrow a_n^{-\frac{1}{n}} \leqslant 2 \Leftrightarrow (a_n^{-\frac{1}{n}})^{-n} \geqslant 2^{-n} \Leftrightarrow a_n \geqslant \dfrac{1}{2^n}$
Montrons que
$$a_n \leqslant \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$
En effet, comme $1 - \dfrac{1}{n} \geqslant 0$, on a :
$a_n \leqslant \dfrac{1}{2^n} \Leftrightarrow a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant \left(\dfrac{1}{2^n}\right)^{1-\frac{1}{n}}$ Or $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)^{1-\frac{1}{n}} = \left(\dfrac{1}{2^n}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$
Donc
$$a_n \leqslant \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

2. Supposons que $a_n \geqslant \dfrac{1}{2^n}$, on aurait, d'après 1), $a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant 2a_n$ et en particulier $a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant max\left(2a_n,\ \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$.
Supposons que $a_n < \dfrac{1}{2^n}$, on aurait d'après 1) $a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$ et en particulier $a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant max\left(2a_n,\ \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$.
Dans tous les cas on a $a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant max\left(2a_n,\ \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$.

3. Les séries $\sum 2a_n$ et $\sum \dfrac{1}{2^{n-1}}$ convergent, donc $\sum max\left(2a_n,\ \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$ converge aussi (voir exercice 14).
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n^{1-\frac{1}{n}} \leqslant max\left(2a_n,\ \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$, on a d'après le critère de comparaison sur les séries à termes positifs, $\sum a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge.