

**Exercice 1**

a) On a  $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} - 1$  et  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} = e$ . Donc  $A = e - 1$

b) On a  $\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n!} - 1$  et  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$ . Donc  $B = e^{-1} - 1$

c) On a

$$\sum_{n=0}^N \frac{3^n}{(n+1)!} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^N \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{N+1} \frac{3^n}{n!} \text{ (Changement d'indice)} = \frac{1}{3} \left( \sum_{n=0}^{N+1} \frac{3^n}{n!} - 1 \right) \text{ et } \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{N+1} \frac{3^n}{n!} = e^3.$$

Donc  $C = \frac{e^3 - 1}{3}$

d) On a  $\sum_{n=1}^N \frac{3n-1}{n!} = 3 \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!}$   
 $= 3 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} + 1$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$ .

Donc  $D = 3e - e + 1$ , soit  $D = 2e + 1$

e) On a  $\frac{(-1)^n}{3^n} n^2 = n^2 q^n$  avec  $q = -\frac{1}{3}$ .

On a  $n^2 q^n = (n(n-1) + n)q^n = n(n-1)q^n + nq^n = q^2 n(n-1)q^{n-2} + nq^{n-1}$ .

Donc  $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n = q^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} + q \sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1}$  (Combinaison linéaire de sommes de séries convergentes).

Soit  $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n = \frac{2q^2}{(1-q)^3} + \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{2q^2 + q(1-q)}{(1-q)^3} = \frac{q(q+1)}{(1-q)^3}$

Pour  $q = -\frac{1}{3}$  on a :  $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{-\frac{1}{3}(-1/3+1)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{-1/3 \times 2/3}{4^3/3^3} = -\frac{3 \times 2}{4^3} = -\frac{3}{32}$

Donc  $E = -\frac{3}{32}$

f) On a  $e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$ , donc  $F = \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{e}{e-1}$

g) On a  $\frac{4n-1}{3^n} = \frac{4}{3} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^n$ . Donc  $G = \frac{4}{3} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} - \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{4 \cdot 3^2}{3 \cdot 2^2} - \frac{3}{2}$ , soit  $G = \frac{3}{2}$ .

h) On a  $\frac{2n^2 - n + 1}{n!} = \frac{2(n(n-1) + n) - n + 1}{n!} = \frac{2n(n-1) + n + 1}{n!}$

Donc  $\sum_{n=0}^N \frac{2n^2 - n + 1}{n!} = \sum_{n=0}^N \frac{2n(n-1)}{n!} + \sum_{n=0}^N \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!}$   
 $= \sum_{n=2}^N \frac{2}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{N-2} \frac{2}{n!} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{N-2} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!}$ .

Donc  $H = 2e + e + e = 4e$ .

i) On a  $\sum_{n=0}^N (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{N+1} - \sqrt{0}$  (Télescopage).

Donc  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = +\infty$  et la série  $\sum_{n \geq 0} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$  diverge.

$$j) \text{ On a } \frac{n^2 + n + 1}{2^n} = \frac{n(n-1) + n + n + 1}{2^n} = \frac{n(n-1)}{2^n} + \frac{2n}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^2} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{2^n}.$$

$$\text{Donc } J = \frac{1}{2^2} \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2^4}{2^2} + 2^2 + 2. \text{ Soit } J = 10.$$

$$k) \text{ On a } (n^2 + n - 1)e^{-2n} = (n(n-1) + n + n - 1)(e^{-2})^n = (e^{-2})^2 n(n-1)(e^{-2})^{n-2} + 2n(e^{-2})^{n-1} \times e^{-2}$$

$$\text{Donc } K = \frac{2(e^{-2})^2}{(1 - e^{-2})^3} + \frac{2e^{-2}}{(1 - e^{-2})^2} = \frac{2(e^{-2})^2 + 2e^{-2}(1 - e^{-2})}{(1 - e^{-2})^2}$$

$$\text{Donc } K = \frac{2e^{-2}}{(1 - e^{-2})^3} = \frac{2e^4}{(e^2 - 1)^3}$$

$$l) \text{ On a } \frac{n^2 + 2^n}{2^{2n}} = \frac{n^2}{4^n} + \frac{1}{2^n} = n^2 \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\text{On a établi que } \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n = \frac{q(q+1)}{(1-q)^3} \text{ (voir e)}.$$

$$\text{Donc } L = \frac{1/4(1/4+1)}{(1-1/4)^3} + \frac{1}{1-1/2} = \frac{5/4^2}{3^3/4^3} + 2 = \frac{20}{27} + 2. \text{ Soit } L = \frac{74}{27}$$

### Exercice 11

$$1. \text{ On a pour tout } n \in \mathbb{N}^*, S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

2. Supposons, par l'absurde, que la série  $\sum \frac{1}{n}$  converge, c'est à dire que la suite des sommes partielles  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers un réel.

On a, d'après 1), pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$ . Par passage à la limite on obtient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$  qui est impossible car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n} - S_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$ .

Donc la série "harmonique"  $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$  diverge.

### Exercice 12

On considère la série  $\sum \frac{1}{e^n + e^{-n}}$  et on note  $S_n$  la n-ième somme partielle de cette série.

1.  $\sum \frac{1}{e^n + e^{-n}}$  est une série à termes strictement positifs, donc sa suites de somme partielles est strictement croissante.

2. On a  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $e^k + e^{-k} \geq e^k$  car  $e^{-k} \geq 0$ . Le passage par l'inverse donne

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{1}{e^k + e^{-k}} \leq \frac{1}{e^k} = e^{-k}.$$

3. On a  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{e^k + e^{-k}} \leq e^{-k} = \left(\frac{1}{e}\right)^k$ , donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n \leq \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{e}\right)^k = \frac{1 - e^{-(n+1)}}{1 - e^{-1}}$

4. La série  $\sum \frac{1}{e^n + e^{-n}}$  converge par comparaison avec la série géométrique  $\sum \left(\frac{1}{e}\right)^n$ . Par passage à la

limite dans l'inégalité de la question 3) on a  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^n + e^{-n}} \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-(N+1)}}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e-1}$ .

Pour aller plus loin

**Exercice 2**

$$\begin{aligned}
 1. \forall n \geq 3, u_n &= \frac{a}{(n-3)!} + \frac{b}{(n-2)!} + \frac{c}{(n-1)!} \\
 \Leftrightarrow \forall n \geq 3, &\Rightarrow \frac{n^2}{(n-1)!} = \frac{a(n-1)(n-2) + b(n-1) + c}{(n-1)!} \\
 \Leftrightarrow \forall n \geq 3, n^2 &= 3n^2 + b \\
 an^2 + (-3a + b)n + 2a - b + c &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \text{ On a } S_n = \sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=3}^n u_k + u_1 + u_2 = \sum_{k=3}^n \left( \frac{1}{(k-3)!} + \frac{3}{(k-2)!} + \frac{1}{(k-1)!} \right) + 1 + 4 = \sum_{k=3}^n \frac{1}{(k-3)!} + \\
 3 \sum_{k=3}^n \frac{1}{(k-2)!} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{(k-1)!} + 5 &= \sum_{k=0}^{n-3} \frac{1}{k!} + 3 \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k!} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k!} + 5 = \sum_{k=0}^{n-3} \frac{1}{k!} + 3 \left( \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} - 1 \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} - 2 = \\
 \sum_{k=0}^{n-3} \frac{1}{k!} + 3 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} &
 \end{aligned}$$

Par passage a la limite on obtient.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k = 5e$$

•

**Exercice 13**

Étudier suivant les valeurs du réel strictement positif  $\alpha$ , la nature de la série de terme général  $u_n$  défini par

$$\forall n \geq 1, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n^2 + k)^\alpha}$$

On a pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\frac{1}{(2n^2)^\alpha} = \frac{1}{(n^2 + n^2)^\alpha} \leq \frac{1}{(n^2 + k)^\alpha} \leq \frac{1}{(n^2)^\alpha}$ , soit  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2n^2)^\alpha} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n^2)^\alpha}$ .

Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\frac{1}{2^\alpha n^{2\alpha-1}} \leq u_n \leq \frac{1}{n^{2\alpha-1}}.$$

Or la série  $\sum \frac{1}{n^{2\alpha-1}}$  converge si, et seulement, si  $2\alpha - 1 > 1$ , c'est à dire,  $\alpha > 1$ . Il découle alors des théorèmes de comparaison que la série  $\sum u_n$  converge si, et seulement si,  $\alpha > 1$ .

**Exercice 14**

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes strictement positifs convergentes. Montrer que les suivantes sont aussi convergentes

$$\sum \min(u_n, v_n), \sum \max(u_n, v_n), \sum \sqrt{u_n v_n} \text{ et } \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$$

Montrons que pour tout  $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ ,  $\frac{xy}{x+y} \leq \min(x, y) \leq \sqrt{xy} \leq \max(x, y) \leq x + y$ .

En effet, on a  $\frac{y}{x+y} \leq 1 \Rightarrow \frac{xy}{x+y} = x \frac{y}{x+y} \leq x \times 1 = x$  et  $\frac{x}{x+y} \leq 1 \Rightarrow \frac{xy}{x+y} = y \frac{x}{x+y} \leq y \times 1 = y$ . Donc  $\frac{xy}{x+y} \leq \min(x, y)$ .

De plus on a :

$$(\min(x, y))^2 = \min(x, y) \times \min(x, y) \leq xy \leq (\max(x, y))^2 \Rightarrow \min(x, y) \leq \sqrt{xy} \leq \max(x, y),$$

et comme  $\max(x, y) = x$  ou  $\max(x, y) = y$ , on a  $\max(x, y) \leq x + y$ .

En remplaçant  $x$  et  $y$  par  $u_n$  et  $v_n$  on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\frac{u_n v_n}{u_n + v_n} \leq \min(u_n, v_n) \leq \sqrt{u_n v_n} \leq \max(u_n, v_n) \leq u_n + v_n \tag{1}$$

Comme  $\sum u_n + v_n$ , il résultent de (1) et du théorème de comparaison sur les séries à termes positifs que les séries  $\sum \min(u_n, v_n)$ ,  $\sum \max(u_n, v_n)$ ,  $\sum \sqrt{u_n v_n}$  et  $\sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$  convergent.

### Exercice 15

Soit  $\sum a_n$  une série à termes strictement positifs convergente.

1. Montrons que pour tout entier  $n \geq 2$  on a :

$$a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq 2a_n \Leftrightarrow a_n \geq \frac{1}{2^n}$$

En effet, on a :

$$a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq 2a_n \Leftrightarrow a_n^{-\frac{1}{n}} \leq 2 \Leftrightarrow (a_n^{-\frac{1}{n}})^{-n} \geq 2^{-n} \Leftrightarrow a_n \geq \frac{1}{2^n}$$

Montrons que

$$a_n \leq \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

En effet, comme  $1 - \frac{1}{n} \geq 0$ , on a :

$$a_n \leq \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{1}{2^n}\right)^{1-\frac{1}{n}} \text{ Or } \left(\frac{1}{2^n}\right)^{1-\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Donc

$$a_n \leq \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

2. Supposons que  $a_n \geq \frac{1}{2^n}$ , on aurait, d'après 1),  $a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq 2a_n$  et en particulier  $a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq \max\left(2a_n, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ .

Supposons que  $a_n < \frac{1}{2^n}$ , on aurait d'après 1)  $a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$  et en particulier  $a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq \max\left(2a_n, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ .

Dans tous les cas on a  $a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq \max\left(2a_n, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ .

3. Les séries  $\sum 2a_n$  et  $\sum \frac{1}{2^{n-1}}$  convergent, donc  $\sum \max\left(2a_n, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$  converge aussi (voir exercice 14).

Comme pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq \max\left(2a_n, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ , on a d'après le critère de comparaison sur les

séries à termes positifs,  $\sum a_n^{1-\frac{1}{n}}$  converge.