Espaces probabilisés - Généralisation

Exercice 1

On lance une pièce une infinité de fois. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement "le k-ième lancer donne pile ".

1. Décrire par une phrase chacun des événements suivants :

$$E_1 = \bigcap_{k=5}^{+\infty} A_k, \; E_2 = \left(\bigcap_{k=1}^{4} \overline{A_k} \right) \cap \left(\bigcap_{k=5}^{+\infty} A_k \right), \; E_3 = \bigcup_{k=5}^{+\infty} A_k$$

2. Écrire à l'aide des A_k l'événement " on obtient au moins une fois pile après le n-ième lancer ".
3. Écrire à l'aide des A_k les événements :
   (a) B_n : " on n'obtient plus que des piles à partir du n-ième lancer ".
   (b) B : " on n'obtient plus que des piles à partir d'un certain lancer ".

Exercice 2

Une puce se déplace sur les trois sommets d'un triangle ABC du plan. Au départ, elle est en A. A chaque instant $n \in \mathbb{N}^*$, elle fait un saut :

- si elle est en A, elle va en B;
- si elle est en B, elle va en A avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et en C avec la probabilité $\frac{1}{2}$;
- si elle est en C, elle y reste.

On note E l'événement "la puce arrive en C ". On cherche à montrer que E est quasi-certain (presque sûr).

1. Montrer que la puce ne peut arriver au point C qu'à des instants pairs.
2. Calculer la probabilité que la puce arrive en C pour la première fois à l'instant $2n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire que $P(E) = 1$.

Exercice 3

On a une pièce donnant pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et on la lance indéfiniment. On note, pour tout $n \geqslant 2$, C_n l'événement : "on a pile-pile pour la première fois aux $(n-1)^{ième}$ et $n^{ième}$ lancers".

1. Calculer $P(C_2)$ et $P(C_3)$.
2. En tenant compte des deux premiers lancers, montrer que : $\forall n \geqslant 4, \; P(C_n) = \frac{1}{3}P(C_{n-1}) + \frac{2}{9}P(C_{n-2})$.
3. En déduire $P(C_n)$.
4. Calculer $\sum_{2}^{+\infty} P(C_n)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 4

Soit une urne avec une boule blanche, une boule noire et une boule rouge. On y effectue des tirages successifs avec remise. On notera B l'événement "on a au moins une boule blanche".

1. Écrire l'événement B (ou $\overline{B}$) de trois manières différentes :
   - avec les A_n : "on n'a aucune blanche sur les n premiers tirages",
   - avec les B_n : "on a une blanche pour la première fois au $n^{ième}$ tirage",
   - avec les C_n : "on a au moins une blanche sur les n premiers tirages".
2. Proposer alors trois calculs pour déterminer $P(B)$. Comment peut-on interpréter le résultat obtenu ?

Exercice 5

On considère une série infinie d'urnes $(U_n)_{n\geqslant 2}$. Chaque urne contient des boules blanches et des boules noires.

L'expérience est la suivante : on tire une boule dans U_2, une boule dans U_3, etc. jusqu'à obtenir pour la première fois une boule noire.

1. Soient l'événement A "on ne tire jamais de boule noire" et les événements A_n "les tirages dans les urnes numérotées de 2 à n n'amènent que des boules blanches".
   (a) Quelle est la particularité de la suite d'événements $(A_n)_{n\geqslant 2}$?
   (b) Exprimer A en fonction des A_n.
2. On suppose que pour tout entier $n \geqslant 2$, l'urne U_n contient n boules dont une seule noire.
   (a) Calculer $P(A_n)$.
   (b) En déduire la valeur de $P(A)$.
3. On suppose que pour tout entier $n \geqslant 2$, l'urne U_n contient n^2 boules dont une seule noire.
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 2$: $P(A_n) = \dfrac{n+1}{2n}$.
   (b) En déduire la valeur de $P(A)$.

Exercice 6

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $k \in [\![1\,;n-1]\!]$. On dispose d'une urne qui contient k boules rouges et $n-k$ boules blanches. On effectue une infinité de tirage d'une boule, avec remise à chaque fois de la boule tirée

1. Déterminer la probabilité de l'événement A_i "on n'obtient aucune boule blanche lors des i premiers tirages ".
2. En déduire la probabilité de l'événement A " on obtient au moins une boule blanche ".

Exercice 7

On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle obtenir face a une probabilité égale à $p \in]0\,;1[$.

1. Quelle est la probabilité qu'au cours des n lancers on n'ait jamais face-pile dans cet ordre ?
2. Est-il possible que l'on n'ait jamais face-pile sur un nombre infini de lancers ?

Exercice 8

On lance 5 dé non truqués, puis on laisse de coté ceux qui amènent 6. On relance les autres, en laissant à nouveau de coté ceux qui ont amené 6, et ainsi de suite.

1. On fixe un dé, et l'on note A_n l'événement "le dé est lancé au moins n fois". Calculer $P(A_n)$.
2. Soit B_n l'événement "on obtient que des 6 en au plus n relances". Calculer $P(B_n)$.
3. Soit B l'événement "on obtient que des 6". Calculer P(B) et interpréter le résultat.

Exercice 9

On lance deux dés équilibrés jusqu'à ce que la somme des numéros obtenus fasse 5 ou 7.

1. (a) Déterminer la probabilité de l'événement E_n "on obtient une somme de 5 au $n^{ième}$ double jet et sur les $n-1$ premiers jets ni la somme de 5 ni celle de 7 n'apparaît".
   (b) En déduire la probabilité qu'on s'arrête sur une somme égale à 5.
2. Déterminer la probabilité qu'on s'arrête sur une somme égale à 7.
3. Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais ?

Exercice 10

On considère une pièce truqué pour laquelle la probabilité d'obtenir face est $p \in]0\,;1[$.

On pose $q = 1 - p$. Deux joueurs A et B lancent alternativement la pièce. A commence. Le premier joueur qui obtient face à gagné la partie.

1. Quelle est la probabilité que le joueur A gagne le jeu ?
2. Quelle est la probabilité que le jeu se termine ?

Exercice 11

Deux joueurs lancent 2 dés parfait. A commence. Si la somme des numéros obtenus est 6, il a gagné. Sinon B lance les dés et si la somme des numéros obtenus est 7, il a gagné. Sinon A rejoue et ainsi de suite. Quel joueur a le plus de chance de gagner ?

Variables aléatoires discrètes

Exercice 12

On considère une variable aléatoire $X(\Omega) = [\![0\,;4]\!]$. On donne :

$$P([X=0]) = \frac{1}{10},\ P([X=1]) = \frac{1}{4} \text{ et } P([X=2]) = \frac{1}{2}$$

1. Sachant que les événements $[X = 3]$ et $[X = 4]$ sont équiprobables, déterminer $P([X = 3])$.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Déterminer une expression de la fonction de ré partition F_X de X et tracer sa courbe représentative.

Exercice 13

Soit une variable aléatoire discrète X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$, de fonction de répartition F_X et dont la loi est donnée par :

$$X(\Omega) = \{-1,\ 0,\ 2\}, P([X=-1]) = \frac{1}{6},\ P([X=0]) = \frac{1}{3} \text{ et } P([X=2]) = \frac{1}{2}$$

1. Déterminer l'expression de la fonction de répartition F_X de X et tracer sa courbe représentative.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = X^2$.

Exercice 14

Soit α un réel et X une variable aléatoire discrète telle que :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, P([X=k]) = \frac{\alpha}{k!}.$$

Déterminer α puis calculer l'espérance de X.

Exercice 15

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites définies pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \text{ et } v_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définissent une loi de probabilité.

2. Soit Y la variable aléatoire dont la loi est donnée par :
$$Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^* P([Y = k]) = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}.$$
Y admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
3. Soit Z la variable aléatoire dont la loi est donnée par :
$$Z(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, P([Z = k]) = \frac{1}{k(k+1)}.$$
Z admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 16

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ telle que : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P([X = k]) = \dfrac{\alpha}{k(k+1)(k+2)}$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = u_k - u_{k+1}$, où $u_k = \dfrac{1}{2k} - \dfrac{1}{2(k+1)}$.
En déduire une valeur de α.
2. Calculer l'espérance de X.
3. Montrer que X ne possède pas de variance.

Exercice 17

On pioche successivement deux boules, sans remettre la première boule, dans une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5. On note X la valeur absolue de la différence des deux numéros obtenus.

1. Donner le loi de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 18

On lance un dé à quatre faces numérotées de 1 à 4. La probabilité de chacune des faces est proportionnelle numéro qu'elle porte. On appelle X la variable aléatoire égale au numéro obtenu.

1. Déterminer la loi de X et sa fonction de répartition.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Déterminer $E(\dfrac{1}{X})$.

Exercice 19

On tire simultanément deux boules au hasard d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On appelle X la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus.

1. Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.
2. En déduire la loi de X.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 20

Une urne contient trois boules numérotées 1,2,3.

1. On en tire n une à une et avec remise. Soit X le plus petit des nombres obtenus et Y le plus grand des nombres obtenus.
   (a) Calculer $P(X \geqslant i)$ pour tout $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$. En déduire la loi de X.
   (b) Calculer $P(Y \leqslant j)$ pour tout $j \in \{1,\ 2,\ 3\}$. En déduire la loi de Y .

(c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

2. On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise, jusqu'à obtenir pour la première fois un numéro déjà tiré. On note alors Z le rang de ce dernier tirage.
   a) Déterminer la loi de Z.
   b) Calculer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 21

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est égale à $\frac{2}{3}$ tandis que celle de faire face est égale à $\frac{1}{3}$.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour l'obtention, pour la première fois, de deux piles consécutifs. Ainsi, au cours des 8 lancers PFFPFPPF, on a X = 7 (P désignant, à un lancer, l'obtention d'un pile, F d'une face). Soit n un entier naturel non nul, on note p_n la probabilité de l'événement $(X = n)$.

1. Expliciter les événements $(X = 2)$, $(X = 3)$, $(X = 4)$, $(X = 5)$. Déterminer p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5.
2. A l'aide de la formule des probabilités totales, en distinguant deux cas selon le résultat du premier lancer, montrer que $\forall n \geqslant 3, p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}$.
3. En déduire l'expression de p_n en fonction de n, pour $n \geqslant 1$.
4. Calculer alors $E(X)$, $E(X(X-1))$ et $V(X)$.

Exercice 22

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$. On effectue une suite d'expérience aléatoires consistant à jeter simultanément deux pièces de monnaie notées A et B. On suppose que ces expériences sont indépendantes et qu'à chaque expérience les résultats des deux pièces sont indépendants. On suppose que, lors d'une expérience, la probabilité que la pièce A donne "pile" est a, et que la probabilité que la pièce B donne "pile" est b. Soit X le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce A donne "face" pour la première fois, et Y le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce B donne "face" pour la première fois.

1. Quelles sont les lois de probabilités de X et de Y ? Calculer E(X).
2. Calculer la probabilité de l'évènement $(X = Y)$.
3. Trouver, pour $n \in N$, la valeur de $P(X > n)$.
4. En déduire la probabilité de l'événement $(X > Y)$. On pourra utiliser le système complet d'événements $(Y = n)n \in \mathbb{N}^*$.
5. Quelle est la probabilité $P(X \geqslant Y)$. Interprétation.

Chaîne de Markov

Exercice 23

Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in N}$ telle que la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant le passé, c'est-à-dire sachant $(X_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, est une fonction de X_n seulement. En d'autres termes, la prédiction du futur ne dépend que de l'état présent et non des états passés.

Exercice 1. Les sommets d'un carré sont numérotés 1 ; 2 ; 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.

Un pion se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, le pion est sur le sommet 1.
- Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le pion à l'instant n.

1. (a) Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout $n \in N$, on a :
$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}P(X_n = 2) + \frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3}P(X_n = 4) :$$
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$P(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}$$
   :
   (c) Donner alors la valeur de $P(X_n = 1)$ en fonction de n.
2. En procédant de la même manière qu'à la question précédente, donner la valeur de $P(X_n = 2)$, $P(X_n = 3)$ et de $P(X_n = 4)$ en fonction de n.
3. Déterminer l'espérance de X_n.

Exercice 24

On dispose de deux urnes U_1 et U_2, de six boules numérotée de 1 à 6 ainsi que d'un dé équilibré. Initialement, l'urne U_1 contient les boules numérotées 1 et 2, l'urne U_2 contient les boules numérotées 3 ; 4 ; 5 et 6.

On appelle échange l'expérience consistant à lancer une fois le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro obtenu avec le dé. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 après n échanges successifs.

1. Les cinq premiers lancers du dé donnent : 1 ; 3 ; 2 ; 3 ; 5. Quel est le contenu de U_1 à l'issue du cinquième échange ?
2. Quelle est la loi de X_1? Calculer son espérance $E(X_1)$.
3. Déterminer la loi de X_2.
4. En général, quelles sont les valeurs possibles de X_n ?
5. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{cases} P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{6}P(X_n = 1) \\ P(X_{n+1} = 6) = \frac{1}{6}P(X_n = 5) \\ P(X_{n+1} = k) = \frac{7-k}{6}P(X_n = k-1) + \frac{k+1}{6}P(X_n = k+1);\ \forall k \in [\![1\,;5]\!] \end{cases}$$
6. En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: $E(X_{n+1}) = \frac{2}{3}E(X_n) + 1$.
7. Calculer alors $E(X_n)$ en fonction de n, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)$.

Exercice 25

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent des boules blanches et noires en nombres respectifs b_1, n_1, b_2, n_2 non nuls. On effectue un premier tirage dans une urne choisie au hasard et on remet la boule obtenue dans son urne d'origine. Si l'on obtient une boule blanche (resp. noire), le $2^{ème}$ tirage se fait dans U_1 (resp. U_2).
Au $i^{ème}$ tirage, si la boule obtenue est blanche (resp. noire), le $(i+1)^{ème}$ tirage se fait dans U_1 (resp. U_2).
On considère la variable aléatoire X_i définie par :
$X_i = 1$ si l'on obtient une boule blanche au $i^{ème}$ tirage et $X_i = 0$ sinon.

1. Donner la loi de X_1 puis de X_2.
2. Montrer que la suite $(P(X_i = 0))_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
3. On suppose ici que $b_1 = 10$, $b_2 = 12$, $n_1 = 5$, $n_2 = 7$.
   (a) Donner l'expression de $P(X_i = 0)$ en fonction de i puis celle de $P(X_i = 1)$.
   (b) Calculer $\lim\limits_{i\to+\infty} P(X_i = 0)$ et $\lim\limits_{i\to+\infty} P(X_i = 1)$. Interprétation du résultat.

Exercice 26 (ESSEC 2002 option T)

Etude d'une marche aléatoire

1. **Résolution d'un système d'équations**
On considère le système de trois équations suivant où y_1, y_2, y_3 sont des nombres réels donnés, et où les inconnues sont x_1, x_2, x_3 :

$$\left\{\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= y_1 \\ x_2 - 2x_3 &= y_2 \\ x_3 &= y_3 \end{aligned}\right. \qquad \text{qu'on écrira matriciellement sous la forme } PX = Y$$

X désignant ci-dessus la matrice-colonne dont les éléments (de haut en bas) sont x_1, x_2, x_3 et Y la matrice-colonne dont les éléments (de haut en bas) sont y_1, y_2, y_3.

   (a) Préciser la matrice P de ce système.
   (b) Résoudre le système d'équations précédent.
   (c) En déduire la matrice inverse P^{-1}.

2. **Calculs matriciels préliminaires**
On considère la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

   (a) Expliciter le produit matriciel $D = P^{-1}MP$ et vérifier que la matrice D est diagonale.
   (b) En déduire que $M = PDP^{-1}$, puis que $M^n = PD^nP^{-1}$ pour tout nombre entier naturel n.
   (c) Expliciter alors les matrices D^n et M^n (on vérifiera le calcul effectué en faisant $n = 0$ et $n = 1$).

3. **Etude d'une marche aléatoire**
Un individu se déplace sur les trois points A_0 d'abscisse 0, A_1 d'abscisse 1 et A_2 d'abscisse 2 selon les règles suivantes :

   - ⋆ A l'instant initial 0, il est au point d'abscisse 2..
   - ⋆ S'il est au point d'abscisse 2 à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$), il est de façon équiprobable en l'un des 3 points d'abscisses 0, 1 ou 2 à l'instant $n+1$.
   - ⋆ S'il est au point d'abscisse 1 à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$), il est de façon équiprobable en l'un des 2 points d'abscisses 0 ou 1 à l'instant $n+1$.
   - ⋆ S'il est au point d'abscisse 0 à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$), il reste au point d'abscisse 0 à l'instant $n+1$..

Pour tout nombre entier naturel n, on désigne par X_n la variable aléatoire indiquant l'abscisse du point où se trouve l'individu à l'instant n et par $E(X_n)$ son espérance.

   (a) Exprimer à l'aide du théorème des probabilités totales les probabilités $P(X_{n+1} = 0)$, $P(X_{n+1} = 1)$ et $P(X_{n+1} = 2)$ en fonction des probabilités $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.
   (b) En déduire une matrice M d'ordre 3 telle que $U_{n+1} = M\,U_n$ où U_n, désigne la matrice-colonne dont les éléments (de haut en bas) sont $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.
   (c) Exprimer le produit matriciel $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} M$ en fonction de la matrice-ligne $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   En multipliant à gauche par la matrice-ligne $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ l'égalité matricielle $U_{n+1} = M\,U_n$, exprimer $E(X_{n+1})$ en fonction de $E(X_n)$. En déduire $E(X_n)$ en fonction de n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.
   (d) Préciser U_0 et exprimer U_n, en fonction de M^n et U_0.
   En déduire $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$ et leurs limites quand n tend vers $+\infty$, puis retrouver à l'aide de ces résultats l'espérance $E(X_n)$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$.