Espaces probabilisés - Généralisation

Exercice 1

1. E_1 : à partir du 5ème lancer, tous les lancers donnent pile.
   E_2 : les 4 premiers lancers donnent face et tous les suivants donnent pile.
   E_3 : au moins l'un des lancers à partir du 5ème donne pile.
2. On peut écrire $\displaystyle\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k$
3. (a) On a $B_n = \displaystyle\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$

   (b) On a $B_n = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$

Exercice 2

1. Il suffit de montrer que la puce est en B en des moments impairs car elle ne peut venir en C qu'à partir de B. Pour tout entier n, notons A_n l'événement la puce est en A à l'instant n et B_n l'événement la puce est en B à l'instant n et C_n l'événement la puce est en A à l'instant n. A_n, B_n et C_n forment un SCE
   Pour tout entier $n > 0$
   $$B_{2n} = (A_{2n-1} \cap B_{2n}) \cup (B_{2n-1} \cap B_{2n}) \cup (C_{2n-1} \cap B_{2n}) = A_{2n-1} \cup \emptyset \cup \emptyset = A_{2n-1}$$
   Montrons maintenant que pour tout $n > 0$, $A_{2n-1} = \emptyset$ par récurrence.
   Initialisation : de manière évidente $A_1 = \emptyset$ car la puce est en B en l'instant 1.
   Hérédité : On a
   $$A_{2n+1} = (A_{2n} \cap A_{2n+1}) \cup (B_{2n} \cap A_{2n+1}) \cup (C_{2n} \cap A_{2n+1}) = \emptyset \cup B_{2n} \cup \emptyset$$
   Or $B_{2n} = A_{2n-1} = \emptyset$ donc $A_{2n+1} = \emptyset$
   On a montré que pour tout $n > 0$, $A_{2n-1} = \emptyset$.
   Ainsi la puce n'est jamais en B en un instant pair. Elle est donc en des instants impairs en B. Or la puce qui arrive en C vient forcément de B, (on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n = B_{n-1} \cap C_n$).
2. L'événement E_n que la puce arrive en C pour la première fois à l'instant $2n$, $n \in \mathbb{N}^*$. est donnée par
   $$E_n = A_0 \cap B_1 \cap A_2 \cap B_3 \cap ... \cap A_{2n-2} \cap B_{2n-1} \cap C_{2n} = \bigcap_{k=1}^{n} (A_{2k-2} \cap B_{2k-1}) \cap C_{2n}$$
   $$P(E_n) = P(A_0)P_{A_0}(B_1)P_{A_0\cap B_1}(A_2)...P_{A_0\cap...\cap A_{2n-2}}(B_{2n-1})P_{A_0\cap...\cap B_{2n-1}}(C_{2n})$$
   $$P(E_n) = P(A_0)P_{A_0}(B_1)P_{B_1}(A_2)...P_{A_{2n-2}}(B_{2n-1})P_{B_{2n-1}}(C_{2n})$$
   $$P(E_n) = 1 \times 1 \times 1/2 \times 1 \times ... \times 1/2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
   Il y a $2n + 1$ termes (instants de 0 à $2n$.)
3. $E = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_n$. Les événements E_n sont incompatibles, d'après le théorème de la limite monotone,
   $$P(E) = \lim_{n\to+\infty} P(\cup_{k=1}^{n} E_k) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} P(E_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$$

Exercice 3

1. $P(C_2) = P(P_1P_2) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ et $P(C_3) = P(F_1P_2P_3) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$.
2. Avec le système complet d'événements (F_1, P_1P_2, P_1F_2) et par la formule des probabilités totales
$$P(C_n) = P_{F_1}(C_n)P(F_1) + P_{P_1F_2}(C_n)P(P_1F_2) + P_{P_1P_2}(C_n)P(P_1P_2)$$
On a $P_{F_1}(C_n) = P(C_{n-1})$ car une fois que l'on a tiré face au 1er lancer, alors on remet à 0 notre modèle et on n'est plus avec n lancers mais avec $n-1$ lancers (et toujours pour finir par pile-pile.)
De la même façon $P_{P_1F_2}(C_n) = P(C_{n-2})$ et $P_{P_1P_2}(C_n) = 0$ car $n \geqslant 2$.
On alors
$$P(C_n) = \frac{1}{3}P(C_{n-1}) + \frac{2}{9}P(C_{n-2})$$
3. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ récurrente d'ordre 2 définie par $u_2 = \frac{4}{9}$, $u_3 = \frac{4}{27}$. On a pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = P(C_n)$.
L'équation caractéristique est $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} = 0$ et a pour solutions $x_1 = -1/3$ et $x_2 = 2/3$ La suite a une expression de la forme,
$$u_n = \lambda\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \mu\left(\frac{2}{3}\right)^n$$
Avec les valeurs de u_2 et u_3 on trouve que $\lambda = 4/3$ et $\mu = 2/3$.
4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} P(C_n) = \frac{4}{3} \times \frac{1}{9}\frac{1}{1-(-\frac{1}{3})} + \frac{2}{3} \times \frac{4}{9}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$. On en déduit que l'événement obtenir Pile-Pile est presque sûr.

Exercice 4

1. Écrire l'événement $\bar{B} = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$, puis $B = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$, et $B = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n$.
2. Tout d'abord pas l'indépendance des tirages (avec remise), on :
$P(A_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ puis $P(B_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\frac{1}{3}$ et $P(C_n) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
   - ⋆ Avec la première écriture, la suite d'événements (A_n) étant décroissante $(A_{n+1} \subset A_n)$ on a par le théorème de la limite monotone, sachant que $\frac{2}{3} \in]-1;1[$.
$$P(\bar{B}) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$$
On en déduit que $P(B) = 1$.
   - ⋆ Comme les B_n sont incompatibles, on a
$$P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$$
   - ⋆ La suite d'événements (C_n) étant croissante $(C_n \subset C_{n+1})$, on a par le théorème de la limite monotone,sachant que $\frac{2}{3} \in]-1;1[$:
$$P(B) = \lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 1$$

Exercice 5

1. (a) Il s'agit d'une suite décroissante $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n \geqslant 2$.
   (b) $A = \displaystyle\bigcap_{n=2}^{+\infty} A_n$

2. (a) Si U_k est l'événement la boule tirée dans l'urne U_k est blanche alors par indépendance des tirages et comme $A_n = \bigcap_{k=1}^{n} U_k$. alors $P(A_n) = P(\bigcap_{k=1}^{n} U_k) = \prod_{k=1}^{n} P(U_k) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n}$

   (b) D'après le théorème de la limite monotone $P(A) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

3. (a) Initialisation : $P(A_2) = P(U_2) = \frac{2^2-1}{2^2} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2\times 2}$.
   Hérédité : Les tirages étant indépendants, les urnes sont différentes, $P(A_{n+1}) = P(U_{n+1} \cap A_n) = P(U_{n+1}) \times P(A_n) = \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} \times \frac{n+1}{2n} = \frac{n+2}{2(n+1)}$.
   On a montré par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 2$: $P(A_n) = \frac{n+1}{2n}$.

   (b) D'après le théorème de la limite monotone $P(A) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Exercice 6

1. Pour tout entier $i \geqslant 1$, $P(A_i) = \left(\frac{k}{n}\right)^i$.

2. La suite d'événements (A_i) est une suite décroissante et $\lim_{i\to+\infty} P(A_i) = 0$ donc $P\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{i\to+\infty} P(A_i) = 0$.
   On peut écrire $A = \overline{\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i}$ donc $P(A) = 1 - \lim_{i\to+\infty} P(A_i) = 1 - 0 = 1$. L'événement " on obtient au moins une boule blanche " est presque sûr.

Exercice 7

1) Pour tout entier $n \geqslant 2$ on note A^n l'événement « au cours des n lancers on n'a jamais face-pile dans cet ordre. » On a $A_n = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$ avec $B_0 = F_1 \cdots F_n$ et pour $k \neq 0$, $B_k = P_1 \cdots P_k F_{k+1} \cdots F_n$. comme les B_k sont incompatibles deux à deux on a $P(A_n) = \sum_{k=0}^{n} P(B_k)$ et par indépendance $P(A_n) = \sum_{k=0}^{n} p^k q^{n-k}$.

Si $p = q = \frac{1}{2}$ alors $P(A_n) = \frac{n+1}{2^n}$.

Si $p \neq q$ alors $P(A_n) = \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p-q}$.

2) On note A l'événement « on n'a jamais face-pile dans cet ordre. »

On a $A = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements, donc résulte du théorème de la limite monotone que $P(A) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$.

Exercice 8

1) Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ on note S_i l'événement « le dé amène le 6 au i-ème lancer »et A_n « le dé est lancé au moins n fois ». On a $P(A_1) = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $P(A_n) = P(\overline{S_1} \cap \cdots \cap \overline{S_{n-1}}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$. Cette dernière formule reste vraie pour $n = 1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$.

2) Pour tout $k \in [\![1\,;5]\!]$, on note B_n^k l'événement « le dé numéro k amène 6 en au plus n relances ».

On a $B_n = B_n^1 \cap \cdots \cap B_n^5$ et par indépendance $P(B_n) = P(B_n^1) \times \cdots \times P(B_n^5)$. Or $P(B_n^1) = \cdots = P(B_n^5)$. Donc $P(B_n) = \left(P(B_n^1)\right)^5$.
Calculons $P(B_n^1)$.

On a $\overline{B_n^1}$=« le dé numéro 1 est lancé au moins $n+2$ fois », donc il découle de 1) que $P(\overline{B_n^1}) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n+1}$ et alors $P(B_n^1) = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n+1}$. Il en résulte que $P(B_n) = \left(1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n+1}\right)^5$.

3) On a $B = \bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite d'événement $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc, d'après le théorème de la limite monotone $P(B) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n+1}\right)^5 = 1$. Donc on est presque sûr d'avoir que des 6.

Exercice 9

On lance deux dés équilibrés jusqu'à ce que la somme des numéros obtenus fasse 5 ou 7.

1. (a) Déterminer la probabilité de l'événement E_n "on obtient une somme de 5 au $n^{ième}$ double jet et sur les $n-1$ premiers jets ni la somme de 5 ni celle de 7 n'apparaît".
   On note S_n l'événement "on obtient une somme de 5 au $n^{ième}$ double jet " et T_n l'événement "on obtient une somme de 7 au $n^{ième}$ double jet " et $U_n = \overline{S_n} \cap \overline{T_n}$. On a alors $E_n = \bigcap_{k=1}^{n-1} U_k \cap S_n$.
   On a $S_k = \{(i, 5-i),\ i \in [\![1\,;4]\!]\}$ et $T_k = \{(i, 7-i),\ i \in [\![1\,;6]\!]\}$, donc $P(S_k) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$, $P(T_k) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$ et $P(U_k) = \dfrac{26}{36} = \dfrac{13}{18}$.
   Donc par indépendance on a pour tout entier non nul n , $P(E_n) = \left(\dfrac{13}{18}\right)^{n-1} \times \dfrac{1}{9}$.

   (b) En déduire la probabilité qu'on s'arrête sur une somme égale à 5.
   On note E l'événement "on s'arrête sur une somme égale à 5". On a $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ et les E_n sont incompatibles deux à deux, donc il résulte du théorème de la limite monotone que $P(E) = \lim_{n\to+\infty} P(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{13}{18}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{9} \times \dfrac{1}{1 - \frac{13}{18}} = \dfrac{2}{5}$.

2. On note F l'événement "on s'arrête sur une somme égale à 7".
   On reprend le même schéma que dans 1), en F_n on obtient une somme de 7 au $n^{ième}$ double jet et sur les $n-1$ premiers jets ni la somme de 5 ni celle de 7 n'apparaît".
   On a alors $F_n = \bigcap_{k=1}^{n-1} U_k \cap T_n$. Donc par indépendance on a pour tout entier non nul n , $P(F_n) = \left(\dfrac{13}{18}\right)^{n-1} \times \dfrac{1}{6}$.
   On a $F = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$ et les F_n sont incompatibles deux à deux, donc il résulte du théorème de la limite monotone que $P(F) = \lim_{n\to+\infty} P(\bigcup_{k=1}^{n} F_k) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{13}{18}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{1 - \frac{13}{18}} = \dfrac{3}{5}$.

3. L'événement G " le jeu ne s'arrête jamais"$=\overline{E \cup F}$. Donc $P(G) = 1 - P(E \cup F) = 1 - P(E) - P(F) = 1 - \dfrac{2}{5} - \dfrac{3}{5} = 0$.

Exercice 10

Soit F_n, l'événement : « Le n-ème lancer donne Face »

Pour tout $n \in \mathbb{N},\ P(F_n) = p$ et $P(F_n) = 1 - p = q$

1. Soit A_n. (resp. B_n) l'événement : « A (resp. B) gagne au n-ème lancer » et A (resp. B) l'événement : «A (resp. B) gagne le jeu ».
   Si A gagne le jeu, c'est obligatoirement lors du lancer n° 1,ou n° 3, ou d'un lancer de n° impair.
   Donc $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_{2n+1}$
   Les événements A_{2n+1} sont incompatibles deux à deux, donc $P(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_{2n+1})$.
   $P(A_1) = p(F_1,) = p,\ P(A_3) = P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3) = q^2 p$ car $\overline{F1},\ \overline{F_2}$ et F_3 sont mutuellement indépendants.
   $P(A_{2n+1}) = P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \cdots \cap \overline{F_{2n}} \cap F_{2n+1}) = q^{2n}p$.
   Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_{2n+1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} pq^{2n} = p \sum_{n=0}^{+\infty} (q^2)^n = \dfrac{p}{1-q^2}$.
   Donc $P(A) = \dfrac{p}{(1-q)(1+q)} = \dfrac{1}{(2-p)}$
2. Soit T_n, l'événement : « Le jeu se termine au n-ème lancer » et soit T l'événement : « le jeu se termine ».
   On a $T = \bigcup_{n=1}^{+\infty} T_n$ et $T_1 = F_1,\ T_2 = \overline{F_1} \cap F_2,\ \cdots,\ T_n = \overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \cdots \cap \overline{F_{n-1}} \cap F_n$.
   Les T_n sont deux à deux incompatibles, donc $P(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(T_n)$. Comme $P(T_n) = q^{n-1}p.$, on a $P(T) = p \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}$, don a $P(T) = \dfrac{p}{1-q} = \dfrac{p}{p} = 1$.
   Le jeu se terminera donc presque sûrement.

Exercice 11

Deux joueurs lancent 2 dés parfait. A commence. Si la somme des numéros obtenus est 6, il a gagné. Sinon B lance les dés et si la somme des numéros obtenus est 7, il a gagné. Sinon A rejoue et ainsi de suite. Quel joueur a le plus de chance de gagner ?

Réponse

Variables aléatoires discrètes

Exercice 12

On considère une variable aléatoire $X(\Omega) = [\![0\,;4]\!]$. On donne :

$$P([X=0]) = \frac{1}{10},\ P([X=1]) = \frac{1}{4} \text{ et } P([X=2]) = \frac{1}{2}$$

1. Sachant que les événements $[X = 3]$ et $[X = 4]$ sont équiprobables, déterminons $P([X = 3])$. On a $\sum_{i=0}^{4} P([X = i]) = 1$ et $P([X = 3]) = P([X = 4])$, donc $\sum_{i=0}^{2} P([X = i]) + 2P([X = 3]) = 1$. On a $\sum_{i=0}^{2} P([X = i]) = \dfrac{17}{20}$, donc $P([X = 3]) = \dfrac{3}{40}$.
2. Calculons l'espérance et la variance de X.
   $E(X) = 0 \times P([X = 0]) + 1 \times P([X = 1]) + 2 \times P([X = 2]) + 3 \times P([X = 3]) + 4 \times P([X = 4]) = 0 + \dfrac{1}{4} + 1 + \dfrac{9}{40} + \dfrac{12}{40} = \dfrac{10 + 40 + 9 + 12}{40} = \dfrac{71}{40}$.

$E(X^2) = 0^2 \times P([X=0]) + 1^2 \times P([X=1]) + 2^3 \times P([X=2]) + 3^2 \times P([X=3]) + 4^2 \times P([X=4]) = 0 + \frac{1}{4} + 2 + \frac{27}{40} + \frac{48}{40} = \frac{10+80+27+48}{40} = \frac{165}{40} = \frac{33}{8}$. On a $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{165}{40} - \frac{71^2}{40^2} = \frac{1559}{1600}$.

3. Déterminer une expression de la fonction de répartition F_X de X et tracer sa courbe représentative.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
   $F_X(x) = 0$ si $x \in]-\infty\,;0[$, $F_X(x) = \frac{1}{10}$ si $x \in [0\,;1[$, $F_X(x) = \frac{7}{20}$ si $x \in [1\,;2[$, $F_X(x) = \frac{17}{20}$ si $x \in [2\,;3[$, $F_X(x) = \frac{37}{40}$ si $x \in [3\,;4[$ et $F_X(x) = 1$ si $x \in [4\,;+\infty[$,

Exercice 13

1.

x	-1	0	2
$F_X(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1

2. $E(X) = -1 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$
   $V(X) = -1 \times \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{6}\right)^2 + 0 \times \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{6}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{17}{72}$

3.

Y	0	1	4
$P(Y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

Exercice 14

Soit α un réel et X une variable aléatoire discrète telle que :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, P([X=k]) = \frac{\alpha}{k!}.$$

Déterminons α puis calculer l'espérance de X.

On a $1 = \sum_{k=0}^{+\infty} P([X=k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha}{k!} = \alpha \mathrm{e}$, donc $\alpha = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n} kP([X=k]) = \sum_{k=0}^{n} k\frac{\alpha}{k!} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{\alpha}{k!} = \alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!}$ et avec un changement d'indice on a $\sum_{k=0}^{n} kP([X=k]) = \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}$. Or $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}$, donc $E(X)$ existe et on a $E(X) = \alpha \mathrm{e} = 1$.

Exercice 15

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites définies pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \text{ et } v_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définissent une loi de probabilité.
2. Soit Y la variable aléatoire dont la loi est donnée par :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^* P([Y=k]) = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}.$$

   Y admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

3. Soit Z la variable aléatoire dont la loi est donnée par :

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, P([Z=k]) = \frac{1}{k(k+1)}.$$

   Z admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 16

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ telle que : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P([X = k]) = \dfrac{\alpha}{k(k+1)(k+2)}$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = u_k - u_{k+1}$, où $u_k = \dfrac{1}{2k} - \dfrac{1}{2(k+1)}$.
   En déduire une valeur de α.
2. Calculer l'espérance de X.
3. Montrer que X ne possède pas de variance.

Exercice 17

On pioche successivement deux boules, sans remettre la première boule, dans une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5. On note X la valeur absolue de la différence des deux numéros obtenus.

1. Donner le loi de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 18

On lance un dé à quatre faces numérotées de 1 à 4. La probabilité de chacune des faces est proportionnelle numéro qu'elle porte. On appelle X la variable aléatoire égale au numéro obtenu.

1. Déterminer la loi de X et sa fonction de répartition.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Déterminer $E(\dfrac{1}{X})$.

Exercice 19

On tire simultanément deux boules au hasard d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On appelle X la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus.

1. Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.
2. En déduire la loi de X.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 20

1. (a) Si on veut $(X \geqslant i)$ pour tout $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$, on veut des numéros $\geqslant i$, alors on ne peut choisir que les numéros allant de i à 3 (il y en a $3 - i + 1 = 4 - i$).
   Ainsi, les tirages étant indépendants (car avec remise), on a :
   $$P(X \geqslant i) = \left(\frac{4-i}{3}\right)^n$$
   On en déduit alors la loi de X :
   $$\forall i \in \{1, 2, 3\}\,, P(X = i) = P(X \geqslant i) - P(X \geqslant i+1) = \left(\frac{4-i}{3}\right)^n - \left(\frac{3-i}{3}\right)^n$$
   (b) Si on veut $(Y \leqslant j)$ pour tout $j \in \{1,\ 2,\ 3\}$, c'est à dire le plus grand des numéros doit être $\leqslant j$, alors on ne peut choisir que les numéros allant de 1 à j (il y en a j).
   Ainsi, les tirages étant indépendants (car avec remise), on a :
   $$P(Y \leqslant j) = \left(\frac{j}{3}\right)^n$$
   On en déduit alors la loi de Y :
   $$\forall j \in \{1, 2, 3\}\,, P(Y = j) = P(Y \leqslant j) - P(Y \leqslant j-1) = \left(\frac{j}{3}\right)^n - \left(\frac{j-1}{3}\right)^n$$

2. On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise, jusqu'à obtenir pour la première fois un numéro déjà tiré. On note alors Z le rang de ce dernier tirage.
   a) $Z(\Omega) = [[2;4]]$. On a bien sur, $P(Z=1) = 0$.
   Si on note X_1 le numéro de la boule lors du premier tirage, $X_1 = 1$, $X_1 = 2$ et $X_1 = 3$ forment un système complet d'événements. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
   $$P(Z=2) = P_{X_1=1}(Z=2)P(X_1=1) + P_{X_1=2}(Z=2)P(X_1=2) + P_{X_1=3}(Z=2)P(X_1=3)$$
   Or $P_{X=i}(Z=2) = \dfrac{1}{3}$ pour $i = 1, 2$ ou 3. En effet, il y a une chance sur 3 qu'on ait le même numéro au deuxième tirage.
   $$P(Z=2) = P_{X_1=1}(Z=2)P(X_1=1) + P_{X_1=2}(Z=2)P(X_1=2) + P_{X_1=3}(Z=2)P(X_1=3)$$
   $$P(Z=2) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$
   $(Z=4)$ signifie qu'on tire lors des trois premiers tirages 3 numéros différents, il y a 6 triplets avec numéros différents sur les 27 triplets possibles. Soit $P(Z=4) = \dfrac{6}{27}$.
   Donc $P(Z=3) = 1 - P(Z=2) - P(Z=3) = 1 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{6}{27} = \dfrac{12}{27}$
   b) $E(Z) = 2\times\dfrac{1}{3} + 3\times\dfrac{12}{27} + 4\times\dfrac{6}{27} = \dfrac{26}{9}$
   $E(Z^2) = 2^2\times\dfrac{1}{3} + 3^2\times\dfrac{12}{27} + 4^2\times\dfrac{6}{27} = \dfrac{80}{9}$ $V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = \dfrac{240}{27} - \left(\dfrac{26}{27}\right)^2 = \dfrac{44}{81}$

Exercice 22

1. Si pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note P_k^A et F_k^A les événements la pièce A donne respectivement "pile" et "face" au kième tirage,
$$P(X=k) = P(P_1^A \cap P_2^A \cap .... \cap P_{k-1}^A \cap F_k^A)$$
Par indépendance, $P(X=k) = P(P_1^A \cap P_2^A \cap .... \cap P_{k-1}^A \cap F_k^A) = a^{k-1}(1-a)$.
De la même façon $P(Y=k) = P(P_1^A \cap P_2^A \cap .... \cap P_{k-1}^A \cap F_k^A) = b^{k-1}(1-b)$.

2. $(X=Y) = \cup_{k=1}^{+\infty}(X=k \cap Y=k)$, par incompatibilité et indépendance
$$P(X=Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)P(Y=k) = \sum_{k=1}^{+\infty}(1-a)(1-b)(ab)^{k-1}$$
$$P(X=Y) = (1-a)(1-b)\sum_{k=0}^{+\infty}(ab)^k = (1-a)(1-b)\frac{1}{1-ab} = \frac{(1-a)(1-b)}{1-ab}.$$

3. $P(X>n) = 1 - P(X \leqslant n) = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(1-a)a^{k-1} = 1 - (1-a)\sum_{k=0}^{n-1}a^k = 1 - (1-a)\frac{1-a^n}{1-a} = a^n.$

4. $P(X>Y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P_{(Y=n)}(X>Y)\times P(Y=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X>n)\times P(Y=n=)\sum_{n=1}^{+\infty} a^n\times(1-b)b^{n-1} =$ $a(1-b)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(ab)^{n-1} = a(1-b)\frac{1}{1-ab}.$

5. $P(X \geqslant Y) = P(X=Y) + P(X>Y) = \dfrac{(1-a)(1-b)}{1-ab} + a(1-b)\dfrac{1}{1-ab} = \dfrac{1-b}{1-ab}.$

Chaîne de Markov

Exercice 23

1. (a) $(X_n = 1), (X_n = 2), (X_n = 3), (X_n = 4)$ forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(X_{n+1} = 1) = P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) + P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) + P_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 1) + P_{(X_n=4)}(X_{n+1} = 1)$$

Pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, sachant le pion sur un sommet i, il y a une $\frac{1}{3}$ qu'il atteigne le sommet j, $j \neq i$ et il ne peut atteindre le sommet i s'il est en i donc

$$P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 2) + \frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3}P(X_n = 4)$$

(b)

$$(X_n = 1), (X_n = 2), (X_n = 3), (X_n = 4)$$

forment un système complet d'événements,

$$P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$$

Mais

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}(P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$$

Ainsi

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}P(X_n = 1)$$

(c) La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = P(X_n = 1)$.
On a $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}u_n$. C'est une suite arithmético-géométrique, dont une étude donne son expression en fonction de n :

$$\forall n \in \mathbb{N} u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}.$$

Alors pour tout entier naturel n, $P(X_n = 1) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}$

2. En procédant de la même manière qu'à la question précédente,on obtient

$$P(X_n = 2) = P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}$$

3. $E(X_n) = 1 \times P(X_n = 1) + 2 \times P(X_n = 2) + 3 \times P(X_n = 3) + 4 \times P(X_n = 4)$

$$E(X_n) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4} + (2 + 3 + 4)\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}\right) = \frac{10}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Exercice 19

On dispose de deux urnes U_1 et U_2, de six boules numérotée de 1 à 6 ainsi que d'un dé équilibré. Initialement, l'urne U_1 contient les boules numérotées 1 et 2, l'urne U_2 contient les boules numérotées 3 ; 4 ; 5 et 6.

On appelle échange l'expérience consistant à lancer une fois le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro obtenu avec le dé. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 après n échanges successifs.

1. Les cinq premiers lancers du dé donnent : 1 ; 3 ; 2 ; 3 ; 5. Quel est le contenu de U_1 à l'issue du cinquième échange ?
2. Quelle est la loi de X_1? Calculer son espérance $E(X_1)$.
3. Déterminer la loi de X_2.
4. En général, quelles sont les valeurs possibles de X_n ?

5. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} P(X_{n+1}=0) = \dfrac{1}{6}P(X_n=1) \\ P(X_{n+1}=6) = \dfrac{1}{6}P(X_n=5) \\ P(X_{n+1}=k) = \dfrac{7-k}{6}P(X_n=k-1) + \dfrac{k+1}{6}P(X_n=k+1);\ \forall k \in [\![1\,;5]\!] \end{cases}$$

6. En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: $E(X_{n+1}) = \dfrac{2}{3}E(X_n) + 1$.
7. Calculer alors $E(X_n)$ en fonction de n, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)$.

Exercice 21

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent des boules blanches et noires en nombres respectifs b_1, n_1, b_2, n_2 non nuls. On effectue un premier tirage dans une urne choisie au hasard et on remet la boule obtenue dans son urne d'origine.
Si l'on obtient une boule blanche (resp. noire), le $2^{ème}$ tirage se fait dans U_1 (resp. U_2).
Au $i^{ème}$ tirage, si la boule obtenue est blanche (resp. noire), le $(i+1)^{ème}$ tirage se fait dans U_1 (resp. U_2).
On considère la variable aléatoire X_i définie par :
$X_i = 1$ si l'on obtient une boule blanche au $i^{ème}$ tirage et $X_i = 0$ sinon.

1. Donner la loi de X_1 puis de X_2.
2. Montrer que la suite $(P(X_i=0))_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
3. On suppose ici que $b_1 = 10$, $b_2 = 12$, $n_1 = 5$, $n_2 = 7$.
   (a) Donner l'expression de $P(X_i=0)$ en fonction de i puis celle de $P(X_i=1)$.
   (b) Calculer $\lim\limits_{i\to+\infty} P(X_i=0)$ et $\lim\limits_{i\to+\infty} P(X_i=1)$. Interprétation du résultat.

Exercice 23 (ESSEC 2002 option T)

Etude d'une marche aléatoire

1. **Résolution d'un système d'équations**
   On considère le système de trois équations suivant où y_1, y_2, y_3 sont des nombres réels donnés, et où les inconnues sont x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = y_1 \\ \qquad x_2 - 2x_3 = y_2 \\ \qquad\qquad x_3 = y_3 \end{cases} \quad \text{qu'on écrira matriciellement sous la forme } PX = Y$$

   X désignant ci-dessus la matrice-colonne dont les éléments (de haut en bas) sont x_1, x_2, x_3 et Y la matrice-colonne dont les éléments (de haut en bas) sont y_1, y_2, y_3.
   (a) Préciser la matrice P de ce système.
   (b) Résoudre le système d'équations précédent.
   (c) En déduire la matrice inverse P^{-1}.
2. **Calculs matriciels préliminaires**
   On considère la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

   (a) Expliciter le produit matriciel $D = P^{-1}MP$ et vérifier que la matrice D est diagonale.
   (b) En déduire que $M = PDP^{-1}$, puis que $M^n = PD^nP^{-1}$ pour tout nombre entier naturel n.
   (c) Expliciter alors les matrices D^n et M^n (on vérifiera le calcul effectué en faisant $n = 0$ et $n = 1$).

3. **Etude d'une marche aléatoire**
Un individu se déplace sur les trois points A_0 d'abscisse 0, A_1 d'abscisse 1 et A_2 d'abscisse 2 selon les règles suivantes :
   - ⋆ A l'instant initial 0, il est au point d'abscisse 2..
   - ⋆ S'il est au point d'abscisse 2 à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$), il est de façon équiprobable en l'un des 3 points d'abscisses 0, 1 ou 2 à l'instant $n+1$.
   - ⋆ S'il est au point d'abscisse 1 à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$), il est de façon équiprobable en l'un des 2 points d'abscisses 0 ou 1 à l'instant $n+1$.
   - ⋆ S'il est au point d'abscisse 0 à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$), il reste au point d'abscisse 0 à l'instant $n+1$..

   Pour tout nombre entier naturel n, on désigne par X_n la variable aléatoire indiquant l'abscisse du point où se trouve l'individu à l'instant n et par $E(X_n)$ son espérance.
   (a) Exprimer à l'aide du théorème des probabilités totales les probabilités $P(X_{n+1}=0)$, $P(X_{n+1}=1)$ et $P(X_{n+1}=2)$ en fonction des probabilités $P(X_n=0)$, $P(X_n=1)$ et $P(X_n=2)$.
   (b) En déduire une matrice M d'ordre 3 telle que $U_{n+1}=M\,U_n$ où U_n, désigne la matrice-colonne dont les éléments (de haut en bas) sont $P(X_n=0)$, $P(X_n=1)$ et $P(X_n=2)$.
   (c) Exprimer le produit matriciel $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} M$ en fonction de la matrice-ligne $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   En multipliant à gauche par la matrice-ligne $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ l'égalité matricielle $U_{n+1}=M\,U_n$, exprimer $E(X_{n+1})$ en fonction de $E(X_n)$. En déduire $E(X_n)$ en fonction de n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.
   (d) Préciser U_0 et exprimer U_n, en fonction de M^n et U_0.
   En déduire $P(X_n=0)$, $P(X_n=1)$, $P(X_n=2)$ et leurs limites quand n tend vers $+\infty$, puis retrouver à l'aide de ces résultats l'espérance $E(X_n)$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 24

On considère une pièce truqué pour laquelle la probabilité d'obtenir face est $p \in]0\,;1[$.

On pose $q=1-p$. Deux joueurs A et B lancent alternativement la pièce. A commence. Le premier joueur qui obtient face à gagné la partie.

1. Quelle est la probabilité que le joueur A gagne le jeu ?
2. Quelle est la probabilité que le jeu se termine ?

Exercice 25

On lance deux dés équilibrés jusqu'à ce que la somme des numéros obtenus fasse 5 ou 7.

1. (a) Déterminer la probabilité de l'événement E_n "on obtient une somme de 5 au $n^{ième}$ double jet et sur les $n-1$ premiers jets ni la somme de 5 ni celle de 7 n'apparaît".
   (b) En déduire la probabilité qu'on s'arrête sur une somme égale à 5.
2. Déterminer la probabilité qu'on s'arrête sur une somme égale à 7.
3. Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais ?

Exercice 6 ?

1. $B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$.
2. Les tirages se font de manières indépendantes (avec remise) donc
$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(B_k) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
3. $P(B) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n) = \lim_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$. L'événement B est négligeable. Il est presque sur qu'on ne tirera pas que des boules blanches.

Exercice 7

1. $B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$.
2. Si on suppose qu'on a eu $B_1 \cap ... \cap B_{k-1}$ c'est qu'on a eu que des boules blanches sur les $(k-1)$ premiers tirages et donc on a ajouté $k-1$ boules blanches au total.
   Ainsi avec le $k$ième tirage, on a la composition de l'urne $3+k-1=k+2$ boules blanches et une boule noire. Cela permet d'avoir : $P_{B_1\cap...\cap B_{k-1}}(Bk) = \dfrac{k+2}{k+3}$
3. $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) \times ... \times P_{B_1\cap...\cap B_{n-1}}(B_n) = \prod_{k=1}^{n} \dfrac{k+2}{k+3} = \dfrac{3}{n+3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
4. Alors
   $$P(B) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\cap_{k=1}^{n} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n+3} = 0$$
   L'événement B est négligeable. Il est presque sur qu'on ne tirera pas que des boules blanches.

Exercice 11

1. (a) $\forall n \geqslant 1,\ P(X=n) \geqslant 0$.
   La série géométrique $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2^n}$ est une série géométrique convergente de somme égale à 1. En résumé, on a bien définie une loi de probabilité.

   (b) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{N} nP(X=n) = \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \dfrac{n}{2^{n-1}}$. On reconnaît le terme général de la série géométrique dérivée et :
   $$E(X) = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2$$
   $\sum_{n=1}^{N} n^2 P(X=n) = \sum_{n=1}^{N} \dfrac{n^2}{2^n}$ or pour tout entier naturel n, $n^2 = n(n-1)+n$ donc
   $$\sum_{n=1}^{N} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{2^{n-1}}$$
   On reconnaît les termes généraux des séries géométriques dérivées première et seconde.
   Le calcul nous donne
   $$E(X^2) = \frac{1}{4}\frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4+2=6$$
   Par la formule de Koenig-Huygens, on a
   $$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 6-4 = 2$$
2. (a) $\forall n \geqslant 0,\ P(Y=n) \geqslant 0$ lorsque $\alpha \geqslant 0$. De plus on veut $\sum_{n\geqslant 0} P(X=n) = 1$ or la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n!} = \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1^n}{n!}$ converge vers $e^1 = e$ alors il faut que $\alpha = \dfrac{1}{e}$.

   (b) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{N} nP(Y=n) = \sum_{n=1}^{N} nP(Y=n) = \dfrac{1}{e}\sum_{n=1}^{N} \dfrac{n}{n!} = \dfrac{1}{e}\sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{(n-1)!} = \dfrac{1}{e}\sum_{n=0}^{N-1} \dfrac{1}{n!}$. La somme $\sum_{n=0}^{N-1} \dfrac{1}{n!}$ a pour limite e donc
   $$E(X) = \frac{1}{e} \times e = 1$$

(a) $\forall n \geqslant 1,\ P(X=n) \geqslant 0$ lorsque $\alpha \geqslant 0$.
On a
$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
donc :
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1}$$
Par télescopage
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1}$$
Cette somme converge vers 1. En résumé on a bien définit une loi de probabilité.

(b)
$$\sum_{n=1}^{N} n \times P(Z=n) = \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1}$$
Or
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n} - 1$$
Cette somme diverge car on reconnaît une somme de Riemann divergente.

Exercice 12

1. On cherche a tel que
$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = 1$$
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a}{k+1}\binom{n}{k} = 1$$
$$a = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}}$$
Or d'après la formule du binôme appliquée à l'expression $(1+x)^n$, qu'on primitive,
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} 1^{k+1} = \frac{1}{n+1}(1+1)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}2^{n+1} - \frac{1}{n+1}$$
Ainsi $a = \dfrac{n+1}{2^{n+1}-1}$.

2. $E(X+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)P(X=k) = \sum_{k=0}^{n}(k+1)\frac{a}{k+1}\binom{n}{k} = a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = a2^n = \frac{2^n(n+1)}{2^{n+1}-1}$ et
$$E(X(X+1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k+1)P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{ak(k+1)}{k+1}\binom{n}{k} = a\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = an2^{n-1} = \frac{2^{n-1}n(n+1)}{2^{n+1}-1}$$

3. $E(X) = E(X+1) - E(1) = a2^n - 1 = \dfrac{2^n(n+1)}{2^{n+1}-1} - 1$. D'autre part $E(X^2) = E(X(X+1) - X) = E(X(X+1)) - E(X)$ alors $V(X) = E(X(X+1)) - E(X) - (E(X))^2 = a2^n - 1 - a2^n - (a2^{n-1} - 1)^2 = \dfrac{2^{n-1}(n+1)(2^{n+1}-n-2)}{(2^{n+1}-1)^2}$

Exercice 15

1. On a la décomposition
$$(X=Y)=\bigcup_{k=0}^{+\infty}(X=k)\cap(Y=k)$$
On a alors par incompatibilité :
$$P(X=Y)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k\cap Y=k)$$
On a alors par indépendance
$$P(X=Y)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k)P(Y=k)=p^2\sum_{k=0}^{+\infty}(q^2)^k$$
Comme $q^2\in]0;1[$, alors
$$P(X=Y)=p^2\times\frac{1}{1-q^2}=\frac{p}{1+q}$$
2. Comme X et Y suivent la même loi, $P(X<Y)=P(Y<X)$, ainsi
$$P(X<Y)+P(X=Y)+P(X>Y)=1$$
donne
$$P(X<Y)=\frac{1-P(X=Y)}{2}=\frac{q}{1+q}$$
3. $(X+Y)(\Omega)=\mathbb{N}$ et $\forall k\in\mathbb{N}$ $(X+Y=k)=\bigcup_{i=0}^{k}(X=i)\cap(Y=k-i)$. Par incompatibilité
$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i\cap Y=k-i)$$
Par indépendance
$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)\times P(Y=k-i)$$
$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}pq^ipq^{k-i}=p^2q^k\sum_{i=0}^{k}1=(k+1)p^2q^k$$