Exercice 1

On considère une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir pile est 0,3.

1. On lance 10 fois la pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 piles ?
2. On lance la pièce jusqu'à obtenir pile. Combien en moyenne effectuera-t-on de lancers ?

Exercice 2

Déterminer l'espérance et la variance de la variable $X \hookrightarrow \mathcal{U}(⟦5\,;10⟧)$.

Exercice 3

Soit X une variable de loi $B(n;p)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0\,;1[[$. Donner la loi de $Y = n - X$.

Exercice 4

Soit $X \hookrightarrow P(\theta)$. On pose $Y = \dfrac{1}{X+1}$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 5

Soit $X \hookrightarrow G(p)$, avec $0 < p < 1$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X > k) = (1-p)^k$.
Montrer alors la propriété d'absence de mémoire : $\forall (k;\ l) \in \mathbb{N},\ P_{(X>l)}(X > k + l) = P(X > k)$.

Exercice 6

Soit un réel $p \in]0\,;1[$. On suppose que la fonction de répartition d'une variable X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F(n) = 1 - (1-p)^n$. Donner la loi de X.

Exercice 7

Deux joueurs A et B disposent d'une pièce telle que la probabilité d'obtenir pile est $\dfrac{1}{2}$.

Chaque joueur lance la pièce n fois : on note X_A (resp. X_B), le nombre de piles obtenus par le joueur A (resp. B).

Déterminer la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de piles.

Exercice 8

On lance de manière indépendante une pièce dont la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0\,;1[$, jusqu'à l'obtention du premier pile. On note X le nombre de lancers nécessaires et Y le nombre de "face" obtenus.

1. Reconnaitre la loi de X, et rappeler son espérance et sa variance.
2. Exprimer Y en fonction de X. En déduire la loi de Y ainsi que son espérance.

Exercice 9

Dans un magasin de matériel informatique, chaque boîte de CD a la probabilité $\dfrac{49}{1000}$ de contenir au moins un CD défectueux et ce indépendamment des autres boites. Régulièrement, un client achète n boites de CD. S'il constate qu'un CD est défectueux, il rapporte toute la boite au magasin. Comment choisir n, pour qu'en moyenne, il ait au plus une boite à rapporter ?

Indication : introduire la variable X égale au nombre de boites à rapporter.

Exercice 10

Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10. Le nombre N de voitures arrivant au péage en une heure suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que les conducteurs choisissent leur file au hasard, indépendamment les uns des autres. On note X_1 le nombre de voitures arrivant au guichet 1 en une heure.

1. Déterminer le nombre moyen de voitures arrivant au péage en une heure.
2. Quelle est la probabilité qu'une voiture qui arrive au péage se dirige vers le guichet $n^o 1$?
3. Calculer $P_{(N=n)}(X_1 = k)$ pour tout $k \in [\![0\,; n]\!]$ puis pour $k > n$.
4. Montrer que $P(X_1 = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P_{(N=n)}(X_1 = k)P(N = n) = e^{-\lambda}(\frac{1}{10})^k \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{9}{10})^n \frac{\lambda^n}{n!}$
5. En déduire la loi de X_1, son espérance et sa variance.

Exercice 11 (EML 94)

On suppose que le nombre N de colis expédiés à l'étranger un jour donné suit une loi de Poisson de paramètre 5. Ces colis sont expédiés indépendamment les uns des autres et la probabilité pour qu'un colis expédié à l'étranger soit détérioré est égale à $0,2$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de colis détériorés et Y la variable égale au nombre de colis en bon état. On a donc $X + Y = N$.

1. Calculer pour tout $(n; k) \in \mathbb{N}^2$, la probabilité conditionnelle $P(N = n)(X = k)$.
2. En déduire que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$.
3. En suivant une méthode similaire, déterminer la loi de Y .
4. A votre avis, les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer les probabilités $P((X = k)\ (Y = j))$ et $P(X = k)P(Y = j)$, pour $(k; j) \in \mathbb{N}^2$. Conclusion ?

Exercice 12(EML 2010)

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.

On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée de l'opération des clients C_1, C_2,. C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0; 1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.

On note A l'événement, : « C_3 termine en dernier son opération ».

Ainsi A est égal à l'événement : $(\min(X_1, X_2) + X_3) > \max(X_1, X_2)$. On se propose de calculer la probabilité de A.

1. Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance $E(X_1)$ et sa variance $V(X_1)$. On définit la variable aléatoire Δ par $\Delta = |X_1 - X_2|$.
2. Calculer la probabilité $P(\Delta = 0)$.
3. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Justifier : $P(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k) P(X_1 = n + k)$
   (b) En déduire : $P(\Delta = n) = 2\dfrac{pq^n}{1+q}$
4. (a) Montrer que Δ admet une espérance $E(\Delta)$ et la calculer.
   (b) Montrer : $E\left((X_1 - X_2)^2\right) = 2V(X_1)$. En déduire que Δ admet une variance $V(\Delta)$ et la calculer.
5. Montrer que l'événement A est égal à l'événement $(X_3 > \Delta)$.
6. (a) En déduire : $P(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\Delta = k) P(X_3 > k)$
   (b) Exprimer $P(A)$ à l'aide de p et q.

Exercice 13

Une urne contient des boules blanches et noires. On suppose que la probabilité de piocher une blanche vaut $p \in]0,1[$. On effectue des tirages successifs avec remise.
Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

1. Reconnaître la loi de X_1 et donner la valeur de $E(X_1)$ et de $V(X_1)$.
2. Soit X_2 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième boule blanche.
   Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance.

Exercice 14

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- ⋆ On commence par piocher des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne).
  On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.
- ⋆ Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise.On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire N. Donner son espérance.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{(N=n)}(X = k)$.
3. Vérifier : $P(X = 0) = \dfrac{4}{9}$. On admet que l'égalité $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ est valable pour $x \in]-1,1[$ et $k \in \mathbb{N}$.
   Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = \dfrac{25}{36}\left(\dfrac{4}{9}\right)^k$.
4. Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$.

Exercice 15

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$.
On effectue une suite d'expérience aléatoires consistant à jeter simultanément deux pièces de monnaie notées A et B. On suppose que ces expériences sont indépendantes et qu'à chaque expérience les résultats des deux pièces sont indépendants. On suppose que, lors d'une expérience, la probabilité que A donne "pile" est a, et que la probabilité que B donne "pile" est b.
Soit X le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que A donne "face" pour la première fois, et Y le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que B donne "face" pour la première fois.

1. Quelles sont les lois de probabilités de X et de Y ? Calculer $E(X)$.
2. Calculer la probabilité de l'évènement $(X = Y)$. Interprétation.
3. Trouver, pour $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $P(X > k)$. En déduire les probabilités $P(X > Y)$ et $P(X \geqslant Y)$. Interprétation.