Exercice 1 (Calculer les intégrales suivantes).

1. $\int_0^1 (t^2+3t)dt$ *2.* $\int_0^1 \frac{t-3}{2}dt$ *3.* $\int_0^1 e^{2x-1}dx$ *4.* $\int_0^1 \frac{1}{t-2}dt$ *5.* $\int_0^1 te^t dt$ *6.* $\int_0^1 2ue^{u^2-1}du$ *7.* $\int_0^1 \frac{3e^t}{e^t+1}dt$ *8.* $\int_0^1 \frac{e^t}{(e^t+1)^2}dt$
9. $\int_0^x \ln t dt$ *(Préciser et justifier les valeurs de x pour lesquelles cette intégrale est définie)* *11.* $\int_e^{e^2} \frac{1}{u}(\ln u)^2 du$
12. $\int_e^{e^2} \frac{1}{u\ln u}du$

Exercice 2.

Soit f définie par $f(x) = \frac{x-4}{-x^2+3x-2}$

1. *Sur quels intervalles f admet-elle des primitives ?*
2. *Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que : $\forall \in D_f, f(x) = \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{1-x}$*
3. *Calculer $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ pour 3 valeurs de a bien choisies, en précisant les x possibles.*
4. *Étudier les variations des fonctions F_a.*

Exercice 3.

Calculer $\int_0^2 |t^3 - 2t^2 + 2t - 1|dt$

Exercice 4.

1. *Calculer* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} e^t dt$ *en appliquant la linéarité.*
2. *Rappeler la formule de* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k$*. Déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de* $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}dt$ *(en justifiant au passage que ces intégrales sont bien définies) Calculer I_0, I_1, I_2*

Exercice 5.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(1 + xe^{-x}\right)$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

PARTIE I *: dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.*

PARTIE II *: soit λ un nombre réel strictement positif. On pose* $\mathcal{A}(\lambda) = \displaystyle\int_0^\lambda f(x)\,dx$*. On se propose de majorer $\mathcal{A}(\lambda)$ à l'aide de deux méthodes différentes.*

1. ***Première méthode*** *: justifier que, pour tout nombre réel λ strictement positif, $\mathcal{A}(\lambda) \leqslant \lambda \times f(1)$.*
2. ***Deuxième méthode***
   (a) *Calculer à l'aide d'une intégration par parties* $\displaystyle\int_0^\lambda xe^{-x}\,dx$ *en fonction de λ.*
   (b) *On admet que pour tout nombre réel positif u, $\ln(1+u) \leqslant u$.*
   Démontrer alors que, pour tout nombre réel λ strictement positif, on a $\mathcal{A}(\lambda) \leqslant -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1$.

Exercice 6.

Soit f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{xe^{-x}}{x^2+1}$.

1. *Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.*
2. *On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.*
   Établir que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
3. (a) *Montrer que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.*
   (b) *En déduire les variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.*
4. *On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :* $u_n = \displaystyle\int_n^{2n} f(x)\,dx$.
   (a) *Montrer que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$,* $0 \leqslant \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   (b) *Montrer que pour tout entier naturel n,* $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\left(e^{-n} - e^{-2n}\right)$.

(c) *En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.*

Exercice 7.

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$.

1. *Montrer que f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$. Étudier le signe de sa fonction dérivée f', sa limite éventuelle en $+\infty$, et dresser le tableau de ses variations.*
2. *On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par son terme général $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx$.*
   (a) *Justifier que, si $n \leqslant x \leqslant n+1$, alors $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$.*
   (b) *Montrer, sans chercher à calculer u_n, que, pour tout entier naturel n, $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$.*
   (c) *En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.*
3. *Soit F la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = [\ln(x+3)]^2$.*
   (a) *Justifier la dérivabilité sur $[0\ ;\ +\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x, le nombre $F'(x)$.*
   (b) *On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,dx$. Calculer I_n.*
4. *On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$. Calculer S_n. La suite (S_n) est-elle convergente ?*

Exercice 8.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Encadrer $\dfrac{1}{t}$ pour $t \in [k; k+1]$. Déduire un encadrement de l'intégrale $\int_k^{k+1} \dfrac{1}{t}dt$. Puis calculer l'intégrale.

Exercice 9.

1. *Étudier la monotonie des suites de termes généraux suivants :*
   $a_n = \displaystyle\int_0^n e^{-t^3}dt$, $b_n = \displaystyle\int_0^{-n} e^{t^3}dt$, $c_n = \displaystyle\int_0^1 x^2 e^{nx^3}dx$, $d_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}dt$
2. *Étudier la monotonie de $\int_0^1 (-t)^n dt$. Étudier sa limite à l'aide de l'inégalité triangulaire.*

Exercice 10.

On définit les fonctions suivantes :

$F(x) = \int_1^x \ln t\,dt$, $G(x) = \int_x^1 \frac{t^2}{\sqrt{t+1}}dt$, $H(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{dt}{t^2-t}$

Pour chacune d'entre elles :

- ⋆ *Donner l'ensemble de définition.*
- ⋆ *Étudier le signe de la fonction sur son ensemble de définition.*
- ⋆ *Montrer qu'elle est $\mathcal{C}^1$ puis étudier ses variations.*

Exercice 11.

Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x t^2 e^t dt$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et préciser $f(0)$.

Exercice 12.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n = \dfrac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t dt$

1. *Calculer I_0, I_1.*
2. *En encadrant grossièrement $(1-t)^n e^t$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{n!}$ puis Étudier la convergence de (I_n)*
3. *Montrer à l'aide d'une IPP que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = I_n - \dfrac{1}{(n+1)!}$*
4. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et déduire la limite de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ quand n tend vers $+\infty$.*

Exercice 13.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \dfrac{t^n}{1+t^2}dt$ et $J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2)dt$

1. *Étudier la monotonie des suites (I_n) et (J_n)*
2. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Étudier la convergence.*
3. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, J_n = \dfrac{\ln 2}{n+1} - \dfrac{2}{n+1}I_{n+2}$*
4. *Étudier la convergence de (J_n) et (nJ_n)*

Exercice 14.

Posons pour $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}$

1. Montrer que (I_n) est décroissante, puis qu'elle converge. 2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Qu'en déduire ?

3. Montrer à l'aide d'une IPP que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5}I_n$ (On pourra utiliser que $(1-x)^{\frac{3}{2}} = (1-x)\sqrt{1-x}$)

4. Calculer I_0 puis déduire une expression de I_1, I_2, puis de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 15.

On définit $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}dt$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

1. *Justifier l'ensemble de définition de F, puis étudier son signe et ses variations.*
2. *On définit g sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = F(x) - \ln x$.*
   (a) *En écrivant, $\ln x$ sous la forme $\displaystyle\int u(t)dt$ où u et les bornes sont bien choisies, étudier le signe de g sur $\mathbb{R}_*^+$*
   (b) *Déduire les limites de F en 0 et $+\infty$.*
   (c) *On admet que $\forall t \in \mathbb{R}^+, e^t \geqslant te^{\frac{t}{2}}$. Déduire le comportement asymptotique de F en $+\infty$.*
3. *Étudier la convexité de F.*
4. *Tracer l'allure de la courbe de F.*

Exercice 16.

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2}dt$

1. *Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$, étudier son signe, puis sa parité (à l'aide d'un changement de variable)*
2. *Justifier que g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$*
   On pourra utiliser une primitive F de $t \mapsto e^{-t^2}$ dont on justifiera l'existence
3. *Étudier les variations de g*
4. *Montrer que : $\forall x > 0, xe^{-4x^2} \leqslant g(x) \leqslant xe^{-x^2}$ et déduire la limite de g en $+\infty$.*

Exercice 17.

On définit la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt$

1. *Justifier que F est bien définie sur $]-1;+\infty[$*
2. *Étudier le signe de F sur $]-1;+\infty[$*
3. *Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$ puis étudier ses variations.*
   Retrouver le résultat de la question précédente.
4. *Montrer que : $\forall t \geqslant 1, \dfrac{t}{\sqrt{t+1}} \geqslant \dfrac{\sqrt{t}}{2}$. Déduire la limite de F en $+\infty$, puis la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt$*
5. *Étudier la convexité de F sur $]-1;+\infty[$ et l'existence éventuelle de points d'inflexion.*
6. *On admet que F est prolongeable par continuité en -1 et $F(-1) = \frac{4}{3}$. Calculer la limite de F' en -1 et interpréter.*

7. *Tracer l'allure de la courbe de F en tenant compte de toutes les questions précédentes. Placer au minimum les points d'abscisse -1 et 0.*
8. ***Calcul de F.** On se propose de calculer $F(x)$ par deux méthodes différentes. L'expression obtenue n'est pas exactement identique dans les deux cas.*
   (a) ***Méthode 1 :** A l'aide d'une intégration par parties, calculer $F(x)$.*
   (b) *Montrer à l'aide d'un changement de variable bien choisi que pour tout $\forall x > -1$: $F(x) = \int_1^{x+1}(\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}})du$*
   (c) ***Méthode 2 :** Calculer alors la valeur de $F(x)$ pour tout $x > 1$.*

Exercice 18.

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes : $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+2}}dt$ $J = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{t^2+2}}dt$ $K = \int_0^1 \sqrt{t^2+2}dt$ $L = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+2}}dt$

1. *Justifier l'existence de ces intégrales, et calculer L.*
2. *Montrer que $J + 2I = K$. En 3 lignes, et sans calcul !*
3. *Montrer par intégration par parties que $K = \sqrt{3} - J$. ($\forall t \in \mathbb{R}, \sqrt{t^2+2} = 1 \times \sqrt{t^2+2}$)*
4. *Montrer à l'aide du changement de variables $x = t + \sqrt{t^2+2}$ que $I = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2})$*
   Justifier et utiliser que $\frac{1}{\sqrt{t^2+2}} \cdot \frac{1}{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+2}}} = \frac{1}{t+\sqrt{t^2+2}}$ lors de l'étape de remplacement de t
5. *Déduire des trois questions précédentes les valeurs de J et K.*