Exercice 1 (Calculer les intégrales suivantes)**.** *Il faut bien sûr ajouter la rédaction sur une copie, surtout pour les IPP.*

1. $\displaystyle\int_0^1 (t^2+3t)dt = \left[\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{3}{2}-0 = \frac{11}{6}.$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-3}{2}dt = \left[\frac{\frac{1}{2}t^2-3t}{2}\right]_0^1 = \frac{\frac{1}{2}-3}{2}-0 = -\frac{5}{4}.$
3. $\displaystyle\int_0^1 e^{2x-1}dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x-1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\mathrm{e}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}.$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t-2}dt = [\ln(|t-2|)]_0^1 = \ln(|-1|)-\ln(|-2|) = -\ln(2).$ ⚠*valeur absolue à ne pas oublier...*
5. *IPP :* $\displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^t dt = \left[t\mathrm{e}^t\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^t dt = \mathrm{e}-0-\left[\mathrm{e}^t\right]_0^1 = \mathrm{e}-(\mathrm{e}-1) = 1.$
6. $\displaystyle\int_0^1 2u\mathrm{e}^{u^2-1}du = \left[\mathrm{e}^{u^2-1}\right]_0^1 = 1-\mathrm{e}^{-1}.$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t+1}dt = \left[3\ln\left(\mathrm{e}^t+1\right)\right]_0^1 = 3\ln(\mathrm{e}+1)-3\ln(2) = 3\ln\left(\frac{\mathrm{e}^t+1}{2}\right).$
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t+1)^2}dt = \left[-\frac{1}{\mathrm{e}^t+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{\mathrm{e}+1}+\frac{1}{2}$
9. *voir le cours.*
10. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{u}(\ln u)^2 du = \left[\frac{1}{3}(\ln u)^3\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} = \frac{1}{3}\left(2^3-1^3\right) = \frac{7}{3}.$
11. *voir le cours.*

Exercice 2. *Soit f définie par $f(x) = \frac{x-4}{-x^2+3x-2}$*

1. *f est définie si et seulement si $-x^2+3x-2 \neq 0 \iff x \neq 1$ ou $x \neq 2$ donc, d'après les théorèmes généraux sur la continuité, f est continue sur les intervalles $]-\infty;1[$, $]1;2[$ et $]2;+\infty[$ donc après des primitives sur chacun de ces intervalles (rien ne dit que ce sont les mêmes sur chacun des intervalles dans le cours...)*
2. *On trouve, par la méthode d'identification, après avoir mis la forme de droite au même dénominateur et développer ce dénomminateur $\alpha = 2$ et β=3 donc $\forall \in D_f, f(x) = \dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{1-x}$*
3. *La question est mal posée, mais il faut prendre une valeur de a différente sur chacun des intervalles évoqués à la question 1. La valeur peut être choisie arbitrairement, donc autant faire simple.*
   Sur $]-\infty;1[$, prenons $a = 0$, ce qui donne :
   $F_0(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\frac{2}{t-2}+\frac{3}{1-t}\right)dt = [2\ln(|t-2|)-3\ln(|1-t|)]_0^x.$
   On obtient, en simplifiant, en gérant les valeurs absolues en fonction de l'intervalle et en regroupant les logarithmes :
   $F_0(x) = 2\ln(2-x)-3\ln(1-x)-2\ln(2) = \ln\left(\dfrac{(2-x)^2}{4(1-x)^3}\right).$
   Sur $]1;2[$, prenons $a = 1,5$, ce qui donne :
   $F_{1,5}(x) = \displaystyle\int_1, 5^x f(t)dt = \int_1, 5^x \left(\frac{2}{t-2}+\frac{3}{1-t}\right)dt = [2\ln(|t-2|)-3\ln(|1-t|)]_{1,5}^x.$
   On obtient, en simplifiant, en gérant les valeurs absolues en fonction de l'intervalle et en regroupant les logarithmes :
   $F_{1,5}(x) = 2\ln(2-x)-3\ln(x-1)+\ln(0,5) = \ln\left(\dfrac{(2-x)^2}{2(x-1)^3}\right).$
   Sur $]2;+\infty[$, prenons $a = 3$, ce qui donne :
   $F_3(x) = \displaystyle\int_3^x f(t)dt = \int_3^x \left(\frac{2}{t-2}+\frac{3}{1-t}\right)dt = [2\ln(|t-2|)-3\ln(|1-t|)]_3^x.$
   On obtient, en simplifiant, en gérant les valeurs absolues en fonction de l'intervalle et en regroupant les logarithmes :
   $F_3(x) = 2\ln(x-2)-3\ln(x-1)+3\ln(2) = \ln\left(\dfrac{8(x-2)^2}{(x-1)^3}\right).$

*4. Pour étudier les variations F_a, il suffit, sur chacun des intervalles, de connaître le signe de $f(x)$.
On trouve que F_0 est croissante sur $]-\infty;1[$, $F_{1,5}$ est décroissante sur $]1;2[$ et F_3 est croissante sur $]1;4]$ puis décroissante sur $[4;+\infty[$.*

Exercice 3 (Calculer $\displaystyle\int_0^2 |t^3-2t^2+2t-1|dt$). *Il faut commencer par étudier le signe de la quantité qui est dans la valeur absolue car on ne sait pas trouver de primitive de fonctions valeur absolue.*

C'est un polynôme de degré 3 donc on peut regarder s'il possède une racine évidente.

1 est une racine évidente donc on le factorise par $t-1$, ce qui donne, par la méthode de votre choix, $t^3-2t^2+2t-1=(t-1)\left(t^2+t+1\right)$, qui est du signe de $t-1$ car, pour t^2+t+1, on a $\Delta<0$ et $a>0$.

Donc $I=\displaystyle\int_0^1 |t^3-2t^2+2t-1|dt+\int_1^2 |t^3-2t^2+2t-1|dt=-\int_0^1 (t^3-2t^2+2t-1)dt+\int_1^2 (t^3-2t^2+2t-1)dt$

Donc $I=-\left[\dfrac{t^4}{4}-\dfrac{2t^3}{3}+t^2-t\right]_0^1+\left[\dfrac{t^4}{4}-\dfrac{2t^3}{3}+t^2-t\right]_1^2=-\left(-\dfrac{5}{12}-0\right)+\left(\dfrac{8}{12}+\dfrac{5}{12}\right)=3.$

Exercice 4. *1.* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} \mathrm{e}^t dt=\int_0^n \mathrm{e}^t dt=\mathrm{e}^n-1.$

2. Cette question n'est pas faisable avec le programme de ECE1 car les intégrales à calculer sont impropres en 1 à cause du $1-t$ au dénominateur...Mais comme ce n'est pas très compliqué et instructif, je vous invite à poursuivre la lecture de ce corrigé.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k=\frac{1-t^n}{1-t}$ pour $t\neq 1$ donc on peut prolonger par continuité l'expression de droite (qui n'est pas définie en $t=1$) par celle de gauche (qui est continue sur $\mathbb{R}$), ce qui assure l'existence de l'intégrale.

Puis, par linéarité (ce sont des sommes finies et des intégrales non impropres, sinon il faudrait être prudent...) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 t^n dt=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}.$

Donc I_n diverge car c'est la somme partielle de la série harmonique et $I_0=1$, $I_1=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$ et $I_2=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{11}{6}$.

Exercice 7. *1. f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ d'après les théorèmes généraux sur la dérivabilité et, pour tout $x\geqslant 0$, on a :*

$f'(x)=\dfrac{1-\ln(x+3)}{(x+3)^2}$ *qui est du signe de $1-\ln(x+3)$.*

Or, pour $x\leqslant 0$, on a, par croisance de la fonction exponentielle, $\ln(x+3)\geqslant\ln(3)>1$ donc $f'(x)<0$. Donc f est strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. De plus, par croissance comparée et par composition de limites (on pose $X=x+3$ pour se ramener aux résultats de cours), on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

enfin, $f(0)=\dfrac{\ln(3)}{3}\approx 0,37.$

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'intégrale est bien définie car f est continue sur $[n;n+1]$ et, comme f est décroissante alors $n\leqslant x\leqslant n+1\Rightarrow f(n)\geqslant f(x)\geqslant f(n+1)$. Comme les bornes sont dans le bon sens, il suffit alors d'appliquer l'inégalité de la moyenne pour conclure.

Il suffit alors d'appliquer le théorème des gendarmes pour conclure, car les deux termes qui encadrent u_n tendent vers 0 d'après la question précédente, donc la suite $(u_n$ aussi.

3. $F'(x)=2\dfrac{1}{x+3}\ln(x+3)$ *donc* $I_n=\displaystyle\int_0^n f(x)dx=\left[\frac{1}{2}F(x)\right]_0^n=\frac{1}{2}\left([\ln(n+3)]^2-[\ln(3)]^2\right).$

4. Par linéarité, on a $S_n=I_n$ donc, d'après la question précédente, la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 9. *1. Afin d'étudier la monotonie des suites de termes généraux suivants, on étudie le signe de la différence entre les termes de rang $n+1$ et n (méthode usuelle, donc). Dans ce cadre de suite définie par des intégrales, le travail consiste donc à regrouper les deux intégrales, soit par linéarité (les deux derniers exemples, lorsque n est un paramètre de la fonction à intégrer), soit par Chasles (les deux premiers exemples, lorsque n est dans les bornes de l'intégrale), puis à utiliser des résultats sur la positivité de l'intégrale.*

Soit $n \in \mathbb{N}$.
$a_{n+1} - a_n = \int_0^{n+1} \mathrm{e}^{-t^3} dt - \int_0^n \mathrm{e}^{-t^3} dt = \int_0^{n+1} \mathrm{e}^{-t^3} dt + \int_n^0 \mathrm{e}^{-t^3} dt = \int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-t^3} dt \geqslant 0$, *car* $n < n+1$ *(bornes dans l'ordre croissant) et car* $\mathrm{e}^{-t^3} > 0$ *sur* $[n; n+1]$.
La suite (a_n) *est donc croissante.*
$b_{n+1} - b_n = \int_0^{-(n+1)} \mathrm{e}^{t^3} dt - \int_0^{-n} \mathrm{e}^{t^3} dt = \int_0^{-(n+1)} \mathrm{e}^{t^3} dt + \int_{-n}^0 \mathrm{e}^{t^3} dt = \int_{-n}^{-(n+1)} \mathrm{e}^{t^3} dt \leqslant 0$, *car* $-n > -(n+1)$ *(bornes dans l'ordre décroissant) et car* $\mathrm{e}^{t^3} > 0$ *sur* $[-(n+1); -n]$.
La suite (b_n) *est donc décroissante.*
$c_{n+1} - c_n = \int_0^1 x^2 \mathrm{e}^{(n+1)x^3} dx - \int_0^1 x^2 \mathrm{e}^{nx^3} dx = \int_0^1 x^2 \mathrm{e}^{(n+1)x^3} - x^2 \mathrm{e}^{nx^3} dx = \int_0^1 x^2 \mathrm{e}^{nx^3} \left(\mathrm{e}^{x^3} - 1\right) dx \geqslant 0$
car, comme $\mathrm{e}^{x^3} - 1 \geqslant 0$ *sur* $[0; 1]$, *la fonction à intégrer est positive sur* $[0; 1]$ *et donc, les bornes étant dans l'ordre croissant, l'intégrale est également positive.*
La suite (c_n) *est donc croissante.*
Pour ce dernier exemple, voir l'exercice 4 pour la bonne définition de l'intégrale (car il y a un problème en $t = 1$.*).*
$d_{n+1} - d_n = \int_0^1 \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t} dt - \int_0^1 \frac{1 - t^n}{1 - t} dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t} - \frac{1 - t^n}{1 - t} dt = \int_0^1 \frac{t^n}{1 - t}(1 - t) = \int_0^1 t^n dt \geqslant 0$
car les bornes sont dans l'ordre croissant et car $t^n \geqslant 0$ *sur* $[0; 1]$.
La suite (d_n) *est donc croissante.*

2. *Étudier la monotonie de* $\int_0^1 (-t)^n dt$. *Étudier sa limite à l'aide de l'inégalité triangulaire.*

Exercice 10. $F(x) = \int_1^x \ln t dt$, $G(x) = \int_x^1 \frac{t^2}{\sqrt{t+1}} dt$, $H(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{dt}{t^2 - t}$

- ⋆ *Donner l'ensemble de définition :*
  Pour F *: si* $x > 0$, *alors* $f : t \mapsto t \ln(t)$ *est continue sur* $[1; x]$ *ou bien sur* $[x; 1]$ *(selon l'ordre) et l'intégrale est bien définie.*
  Si $x \leqslant 0$ *alors* $0 \in [x; 1]$ *et il y a un problème d'ensemble de définition pou la fonction à intégrer.*
  On serait alors tenté de conclure que $D_F =]0; +\infty[$ *mais en réalité, pour* $x = 0$, *cette intégrale, impropre en 0 (programme de ECE2), est convergente (cela revient à dire que la limite en 0 de* $x \mapsto x \ln(x) - x$, *une primitive de la fonction à intégrer, est finie, ce qui est vraie par croissance comparée).*
  En réalité, on a donc $D_F = [0; +\infty[$.
  En général, les questions lors des épreuves de concours, sont plus du style « montrer que F *est définie sur tel intervalle », ce qui simplifie le raisonnement (si on vous donne la réponse, vous penserez au problème en 0).*
  Pour G *: si* $x > -1$, *alorsu* : $t \mapsto \frac{t^2}{\sqrt{t+1}}$ *est continue* $[1; x]$ *ou bien sur* $[x; 1]$ *(selon l'ordre) et l'intégrale est bien définie.*
  Si $x \leqslant -1$ *alors* $-1 \in [x; 1]$ *et il y a un problème d'ensemble de définition pou la fonction à intégrer.*
  On serait alors tenté de conclure que $D_G =]-1; +\infty[$ *mais en réalité, pour* $x = -1$, *cette intégrale, impropre en -1 (programme de ECE2), est convergente (il y a un critère de Riemann, ramené de -1 à 0 par CDV!).*
  En réalité, on a donc $D_G = [-1; +\infty[$.
  Pour H *: les valeurs interdites de la fonction à intégrer, notée* h, *sont* 0 *et* 1 *et, si* $x < 0$ *ou si* $x > 1$, *on a toujours* 0 *ou* 1 *qui est strictement entre les deux bornes et l'intégrale diverge.*
  Pour $x = 0$ *et* $x = 1$ *on montrer également que l'intégrale diverge (en ECE2).*
  Pour $0 < x < 1$, h *est continue entre les deux bornes et* $H(x)$ *existe donc.*
  donc $D_H =]0; 1[$.
- ⋆ *Étudier le signe de la fonction sur son ensemble de définition.*
  Pour F *:*
  Si $0 < x < 1$ *alors les bornes sont dans l'ordre décroissant et* f *est négative entre les deux bornes donc* $F(x) \geqslant 0$.
  Si $x \geqslant 1$ *alors les bornes sont dans l'ordre croissant et* f *est positive entre les deux bornes donc* $F(x) \geqslant 0$.

Donc F est positive sur D_F.
Pour G : pour tout $x \in D_G$, u est toujours positive entre les bornes, donc le signe de G ne dépend que de l'ordre des bornes.
G est donc positive sur $[-1;1]$ puis négative sur $[1;+\infty[$.
Pour H : pour tout $x \in D_H$, h est toujours négative entre les bornes (signe d'un polynôme de degré 2), donc le signe de H ne dépend que de l'ordre des bornes.
H est donc positive sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ puis négative sur $\left[\frac{1}{2};1\right[$.

⋆ *Montrer qu'elle est $\mathcal{C}^1$ puis étudier ses variations.*
Pour F : c'est une conséquence directe du théormèe fondamental de l'intégration car F est l'unique primitive de f qui s'annule en 1 donc, comme f est continue sur $]0;+\infty[$, F est C^1 sur cet intervalle. Comme la limite de f est infinie en 0, F n'est pas C^1 sur l'intervalle fermé en 0.
Enfin, F est décroissante sur $[0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$ car $F' = f$.
Remarque : comme $F(1) = 0$, cela permet de déterminer le signe de F d'une autre manière.
Pour G : sur D_G, $G(x) = -\displaystyle\int_1^x u(t)dt$ donc G est C^1 sur $D_G =]-1;+\infty[$ mais pas sur $D_G = [-1;+\infty[$ (mêmes arguments que pour F) et $G' = -u < 0$. Donc G est décroissante sur D_G (ce qui permet également de déterminer le signe, en combinant avec $G(1) = 0$.
Pour H : H est C^1 sur D_H et $H' = h < 0$ donc H est décroissante sur D_H.

Exercice 13. *Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln(1+t^2)dt$*

1. *(I_n) et (J_n) sont décroissantes (voir la correction de l' exercice 10 pour la méthode). On trouve que cela dépend du signe de $\dfrac{t^n}{1+t^2}(t-1) \leqslant 0$ sur $[0;1]$ pour I_n par exemple.*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant \dfrac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n$ sur $[0;1]$ et on intègre ces inégalités entre 0 et 1, ce qui conserve l'ordre (bornes dans l'ordre croissant) et donne le résultat. Ceci implique que la suite (I_n) tend vers 0.*
3. *On montre que $\forall n \in \mathbb{N}, J_n = \dfrac{\ln 2}{n+1} - \dfrac{2}{n+1} I_{n+2}$ par intégration par partie, dans le sens classique lorsqu'on a affaire à un logarithme.*
4. *On déduit des deux questions précédentes que (J_n) tend vers 0 et que (nJ_n) tend vers $\ln(2)$.*

Exercice 17. *On définit la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt = \int_0^x f(t)dt$.*

1. *F est bien définie sur $]-1;+\infty[$ (voir exercice 11 pour la rédaction).*
2. *F est positive sur $]-1;0]$ (f négative et bornes inversées) et positive sur $[0;+\infty[$ (f positive et bornes bien ordonnées)*
3. *F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$ et $F' = f$(Théo fond. intégration + f C^0) donc F décroissante sur $]-1;+\infty[$ et croissante sur $[0;+\infty[$. Comme $F(0) = 0$, on retrouve les résultats sur le signe de $F(x)$.*
4. *On a $\forall t \geqslant 1$, $\frac{t}{\sqrt{t+1}} \geqslant \dfrac{t}{\sqrt{2t}} \geqslant \dfrac{t}{\sqrt{4t}} = \dfrac{\sqrt{t}}{2}$.*
   On a pour tout $x \geqslant 1$ $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt + \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt \geqslant \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt + \int_1^x \frac{\sqrt{t}}{2}dt = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt + \frac{1}{3}(x^{\frac{3}{2}} - 1)$ qui diverge vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Donc $F(x)$ aussi, par comparaison de limites.
   L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt$ est donc divergente.
5. *$F''(x) = f'(x) = \dfrac{x+2}{2(x+1)\sqrt{x+1}} >$ sur $]-1;+\infty[$ donc F est convexe sur cet ensemble (pas de point d'inflexion).*
6. *On admet que F est prolongeable par continuité en -1 et $F(-1) = \frac{4}{3}$. Calculer la limite de F' en -1 est celle de f en -1 et est infinie. Donc le prolongement ainsi obtenu n'est pas C^1 et il y a graphiquement une demie tangente verticale en $x = -1$.*
7. *A vous de la faire !*
8. ***Calcul de F.** On se propose de calculer $F(x)$ par deux méthodes différentes. L'expression obtenue n'est pas exactement identique dans les deux cas.*

(a) ***Méthode 1 :*** *A l'aide d'une intégration par parties* ($u'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t+1}}$ *et* $v(t) = t$ $F(x) = 2x\sqrt{x+1} - \displaystyle\int_0^x 2\sqrt{t+1} = F(x) = 2x\sqrt{x+1} - \left[\frac{4}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}}\right] 0^x = 2x\sqrt{x+1} - \frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}$.

(b) *Le changement de variable bien choisi est* $u = t+1$ *et on se sert de* $\dfrac{u-1}{\sqrt{u}} = \dfrac{u}{\sqrt{u}} - \dfrac{1}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} - \dfrac{1}{\sqrt{u}}$.

(c) ***Méthode 2 :*** *On en déduit que* $F(x) = \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2sqrtu\right] 0^{x+1} = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2sqrtx + 1 + \frac{4}{3}$. *pour tout* $x > 1$.
Pour constater que les deux expressions sont égales, rempalcer le x *devant la racine par* $(x+1) - 1$ *dans la première expression, développer et arranger.*

Exercice 18. *L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :* $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+2}}dt$ $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{t^2+2}}dt$ $K = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{t^2+2}dt$ $L = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+2}}dt$

1. $L = \left[\sqrt{t^2+2}\right]_0^1 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.
2. *Par linéarité et en regroupant les deux fractions,* $J + 2I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2+2}{\sqrt{t^2+2}}dt = \int_0^1 \sqrt{t^2+2}dt = K$.
3. *Pas de piège, tout doit rouler grâce à l'indication entre parenthèse.*
4. $x = t + \sqrt{t^2+2}$ *donc* $dx = \left(1 + \dfrac{t}{\sqrt{t^2+2}}\right)dt$. *Donc* $\dfrac{1}{\sqrt{t^2+2}}dt = \frac{1}{t+\sqrt{t^2+2}}dx = \dfrac{1}{x}dx$, *d'après l'indication entre parenthèse. On a ensuite* $I = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{1+\sqrt{3}} \frac{1}{x}dx = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2})$
5. *On a :* $J + K = \sqrt{3}$ *d'après la question 3 et* $J - K = 2I = 2\left(\ln(1+\sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2})\right)$ *d'après la question précédente.*
   Donc, en résolvant : $J = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \ln(1+\sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2})$ *et* $K\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \ln(1+\sqrt{3}) + \ln(\sqrt{2})$.