Exercice 1

1. Par lecture graphique :
   (a) $f'(x) = 0$ pour $x = 3,7$ (intersection de $\mathcal{C}_{f'}$ et O_x).
   (b) $f''(x) = 0$ pour $x = 2,5$ (tangente horizontale à $\mathcal{C}_{f'}$) .
2. (a) $\mathcal{C}_1$ représente f car elle possède une tangente horizontale au point d'abscisse $3,7$ et $\mathcal{C}_2$ représente la dérivée seconde f'' car elle coupe l'axe des abscisses pour $x = 2,5$.
   (b) En regarsant $\mathcal{C}_2$, f est convexe pour $x > 2,5$ et concave pour $x < 2,5$ (signe de la dérivée seconde).
   (c) Les coordonnées du point d'inflexion de la courbe représentative de f sont $(2,5; -1,5)$ et une valeur approchée du coefficient directeur de la tangente en ce point est $-1,8$ (en regardant sur $\mathcal{C}_{f'}$).

Exercice 2 ([Étude de fonctions)

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x} + x$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes généraux.
   On trouve $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 0$, $f''(x) = \mathrm{e}^{-x} > 0$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.
   Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$ et comme $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\,(1 + x\mathrm{e}^{x})$, on a, par composition et produit de limites et par croissances comparées pour le terme dans la parenthèse, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2\, e^{-2x}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes généraux.
   On trouve $g'(x) = \mathrm{e}^{-2x}\left(2x - 2x^2\right) = \mathrm{e}^{-2x}2x\,(1 - x) \geqslant 0 \iff x \in [0;1]$, $f''(x) = \mathrm{e}^{-2x}\left(2 - 8x + 4x^2\right) \geqslant 0 \iff x \in \left]-\infty; x_1\right] \cup \left[x_2; +\infty\right[$ (avec $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$), donc f est convexe sur chacun des intervalles de l'union, concave sur $[x_1; x_2]$ et possède deux points d'inflexion, aux points d'abscisses x_1 et x_2.
   Enfin, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ par produit et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, ce qui donne l'axe des abscisse comme asymptote à la courbe en $+\infty$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}$ est C^∞ sur chaque intervalle de son ensemble de définition $\left]-\infty; 0\right[\cup \left]0; +\infty\right[$ d'après les théorèmes généraux.
   On trouve $h'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}(x-1)}{x^2} \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$ et $h''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}\left(x^3 - 2x^2 + 2x\right)}{x^4} = \dfrac{x\mathrm{e}^{x}\left(x^2 - 2x + 2\right)}{x^4}$, du signe de x
   ($a > 0$ et $\Delta < 0$ pour le polynôme de degré 2). Donc f est concave sur $\left]-\infty; 0\right[$ et convexe sur $\left]0; +\infty\right[$ et ne possède aucun point d'inflexion.
   Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to0^-} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} h(x) = +\infty$ par simple quotient de limites pour les trois dernières limites.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

4. $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes généraux.
On trouve $u'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} \geqslant 0 \iff x \leqslant 0$ et $u''(x) = \left(-2+4x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2} \geqslant 0 \iff x \in \left]-\infty; x_1\right] \cup \left[x_2; +\infty\right[$, en posant $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ et $x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Donc f est convexe sur chacun des intervalles de l'union précédente, concave sur $[x_1; x_2]$ et possède deux points d'inflexions d'abscisses x_1 et x_2.
Enfin, par composition de limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$ donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe en $-\infty$ et en $+\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
$u(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Exercice 3

1. D'après les théorèmes généraux, a est continue sur $\mathbb{R}_+$ et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, pour $x > 0$, on trouve $a'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}(1-2x)}{2\sqrt{x}}$ donc $\lim\limits_{x\to0} a'(x) = +\infty$, ce qui montre, par le théorème de prolongement, que a n'est pas C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
2. D'après les théorèmes généraux, b est continue sur $\mathbb{R}_+$ et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour $x > 0$, on trouve $b'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$ donc $\lim\limits_{x\to0} b'(x) = +\infty$, ce qui montre, par le théorème de prolongement, que b n'est pas C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
3. D'après les théorèmes généraux, c est continue et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to0} c(x) = \lim\limits_{x\to0} x^2 \ln x = 0 = c(0)$ donc c est continue sur $\mathbb{R}_+$.
De plus, pour $x > 0$, on trouve $c'(x) = 2x\ln(x) + x$ donc, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to0} c'(x) = 0$, ce qui montre, par le théorème de prolongement, que c est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et que $c'(0) = 0$.
4. Sur $\mathbb{R}_+^*$ $d(x) = \dfrac{1+e^x+e^{2x}}{1+e^x}$. D'après les théorèmes généraux, d est continue et C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. D'après les théorèmes généraux, e est continue et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to0} e(x) = \mathrm{e}^0 = 1$ donc e est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, pour $x > 0$, on trouve $e'(x) = (\ln(x)+1)\exp(x\ln x)$ donc $\lim\limits_{x\to0} e'(x) = -\infty$, ce qui montre, par le théorème de prolongement, que e n'est pas C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. D'après les théorèmes généraux, f est continue sur $]-\infty, 1]$ et C^1 sur $]-\infty, 1[$ (car, par composition, on peut conclure lorsque la quantité sous la racine est strictement positive).
De plus, pour $x \in]-\infty, 1[$, $f'(x) = \sqrt{1-x} - \dfrac{x}{2\sqrt{1-x}}$ donc $\lim\limits_{x\to1} f'(x) = -\infty$, ce qui montre, par le théorème de prolongement, que f n'est pas C^1 sur $]-\infty, 1]$.
7. D'après les théorèmes généraux, g est continue sur $[-1, 1]$ et C^1 sur $]-1, 1[$ (car, par composition, on peut conclure lorsque la quantité sous la racine est strictement positive).
De plus, pour $x \in]-1, 1[$, $g'(x) = -\sqrt{1-x^2} - \dfrac{(1-x)2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} - \dfrac{x\sqrt{(1-x)(1-x)}}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = -\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ donc $\lim\limits_{x\to1} g'(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-1} g'(x) = +\infty$, ce qui montre, par le théorème de prolongement, que g est C^1 au maximum sur $]-1, 1]$.
8. En posant $X = \mathrm{e}^x$ et en remarquant que $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 3 = X^2 - 2X + 3 > 0$ sur $\mathbb{R}$ car $a = 1 > 0$ et $\Delta = -8 < 0$, on peut conclure d'après les théorèmes généraux que h est C^1 sur $\mathbb{R}$ (et même C^∞).
9. D'après les théorèmes généraux, i est continue sur $]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$ et C^1 sur $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ (car, par composition, on peut conclure lorsque la quantité sous la racine est strictement positive).
De plus, pour $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$, $i'(x) = \sqrt{x+x^2} + \dfrac{x(2x+1)}{2\sqrt{x+x^2}} = \sqrt{x+x^2} + \dfrac{(2x+1)}{2}\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$ donc $\lim\limits_{x\to-1} i'(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0} i'(x) = 0$, ce qui montre, par le théorème de prolongement, que i est C^1 au maximum sur $]-\infty, -1[\cup[0, +\infty[$.

10. D'après les théorèmes généraux, j est continue et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, pour $x > 0$, on a $j(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)}$ donc, par quotient et limite classique, $\lim\limits_{x\to 0} j(x) = 0 = j(0)$, donc j est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Pour $x > 0, j'(x) = \dfrac{3}{2}\dfrac{\sqrt{x}}{e^x - 1} + \dfrac{x\sqrt{x}e^x}{(e^x - 1)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\dfrac{1}{\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)}\left[\dfrac{3}{2} + \dfrac{e^x}{\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)}\right]$ donc $\lim\limits_{x\to 0} j'(x) = +\infty$ par produit et limite classique, ce qui montre, par le théorème de prolongement, que j n'est pas C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

1. Comme $e^x - 1 > 0 \iff x > 0$, alors, la règle des signes (ou un tableau de signes) montre que $\dfrac{e^x - 1}{x} > 0$ si $x \neq 0$ donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
Ensuite, f est continue d'après les théorèmes généraux, sauf éventuellement en 0. Comme $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, par composition de limites, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ln(1) = 0 = f(0)$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. f est C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ par les théorèmes généraux et, pour $x \neq 0$, $f'(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) + x\dfrac{x}{e^x - 1}\dfrac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) + \dfrac{x}{e^x - 1}\dfrac{xe^x - (e^x - 1)}{x} = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) + \dfrac{x}{e^x - 1}\left(e^x - \dfrac{(e^x - 1)}{x}\right)$.
3. On a $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x - 1}\left(e^x - \dfrac{(e^x - 1)}{x}\right) = 1(1 - 1) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$.

Exercice 6

On trouve facilement que f est définie et C^∞ sur $\mathbb{R}$ (Th. gén.) et que $f'(x) = \dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$, cette dernière s'obtenant par factorisation par e^x en haut et en bas.

f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $*0; 1[$ par le théorème de la bijection et sa fonction réciproque est strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$ car la dérivée ne s'annule jamais.

Enfin $(f^{-1})(0) = 0$ car $f(x) = 0 \iff e^x - 1 = 0 \iff x = 0$ donc $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(0)} = 2$.

$(f^{-1})\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln(3)$ car $f(x) = \dfrac{1}{2} \iff 2(e^x - 1) = e^x + 1 \iff x = \ln(3)$ donc $(f^{-1})'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{f'(\ln(3))} = \dfrac{8}{9}$.

$(f^{-1})\left(-\dfrac{1}{4}\right) = \ln\left(\dfrac{5}{3}\right)$ car $f(x) = -\dfrac{1}{4} \iff 4(e^x - 1) = -(e^x + 1) \iff x = \ln\left(\dfrac{5}{3}\right)$ dc $(f^{-1})'\left(-\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{f'(\ln\left(\dfrac{5}{3}\right))} = \dfrac{32}{25}$.

Enfin, Pour tout $y \in]0; 1[$, $f(x) = y \iff (e^x - 1) = y(e^x + 1) \iff e^x = \dfrac{1 + y}{1 - y} \iff x = \ln\left(\dfrac{1 + y}{1 - y}\right) = f^{-1}(y)$.

On trouve, pour tout $y \in]0; 1[$, $(f^{-1})'(y) = \dfrac{2}{(1 - y)^2}$, ce qui permet de retrouver les résultats de la question 4

Exercice 7

C'est le même genre d'exercice que le précédent à deux différences près : f n'est pas monotone donc il fait choisir un intervalle sur lequel elle est strictement monotone (ici $\left[\frac{1}{e},+\infty\right[$) pour définir une bijecvtion de cet intervalle sur son image ($\left[-\frac{1}{e},+\infty\right[$).

Du coup, comme f' s'annule en $\frac{1}{e}$, f' est dérivable uniquement sur $\left]-\frac{1}{e},+\infty\right[$.

Enfin, il est impossible dans cet exercice d'expliciter la fonction réciproque mais on peut calculer pour certaines valeurs numériques en suivant le même plan.

$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(1)}=1$ (car $f(1)=1$), $(f^{-1})'(\mathrm{e})=\frac{1}{f'(\mathrm{e})}=\frac{1}{2}$ (car $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}$) et $(f^{-1})'(2\mathrm{e}^2)=\frac{1}{f'(\mathrm{e}^2)}=\frac{1}{3}$ (car $f(\mathrm{e}^2)=2\mathrm{e}^2$).

Exercice 11

1. Posons $g(x)=2-2e^{-x}-x$ alors $x=2-2e^{-x}=f(x) \iff g(x)=0$.
   g est C^1 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel $x, g'(x)=2\mathrm{e}^{-x}-1\leqslant 0 \iff x\leqslant \ln(2)$
   De plus, on montre que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ par croissances comparées (factoriser par l'exponentielle pour faire propre), que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ et que $g(0)=0$.

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		r		$+\infty$
$g'(x)$			$+$		0		$-$		
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1-\ln(2)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

   Comme g continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de la bijection appliqué deux fois montre que l'équation $g(x)=0$ possède une unique solution sur chacun des intervalles $]-\infty;\ln(2)]$ et $[\ln(2);+\infty[$.
   Sur la partie de gauche, la solution est 0 et sur la partie de droite, la solution, notée r, est bien l'unique solution strcitement positive de l'équation (c'est ce qu'il fallait montré, l'énoncé n'est pas clair...)
   Comme g est décroissante sur $[\ln(2);+\infty[$ et que $g(1)=1-\frac{2}{\mathrm{e}}>0$, que $g(2)=-\frac{2}{\mathrm{e}^2}<0$ et que $g(r)=0$, on en déduit que $1\leqslant r\leqslant 2$.
   IL faut remarquer que r est un point fixe de f, par définition de f et de g.
2. On considère la suite u définie par : $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=2-2e^{-u_n}$
   (a) f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $f'(x)=2\mathrm{e}^{-x}>0$ et $1\leqslant r$ donc $1\leqslant 2-\frac{2}{\mathrm{e}}=f(1)\leqslant f(r)=r$. Donc, $[1,r]$ est stable par f $f(x)-x=g(x)\geqslant 0$ sur $[1,r]$ (voir la première question).
   (b) $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\in[1,r]$ par une récurrence classique et comme, $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n$, on déduit de la question précédente que $u_{n+1}-u_n\geqslant 0$. La suite estr donc croissante.
   (c) Commer la suite est majorée par r, elle converge vers $\ell\in[1;r]$, et, par continuité de f et en passant à la limite dans la définition par récurrence, on obtient $f(\ell)=\ell$ donc $\ell=r$.
3. (a) Il faut ajouter à ce qui précède que f est C^1 sur $[1;r]$ et que, sur cet intervalle $|f'(x)|=2\mathrm{e}^{-x}\leqslant 2\mathrm{e}^{-1}=\frac{2}{\mathrm{e}}$. Le reste est classique IAF puis récurrence.
   (b) Il suffit pour cela de choisir n tel que $\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^n\leqslant 10^{-9}$, ce qui donne $n\geqslant\frac{\ln\left(10^{-9}\right)}{\ln\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)}$ qu'on peut calculer à l'aide d'une calculatrice. Ceci permet donc, en calculant le terme de la suite correspondant à ce rang n, de donner une valeur approchée à 10^{-9} près de r.

Exercice 12

On souhaite déterminer le nombre de solutions de $(E) : x^3 - 3x + 1 = 0$ ainsi qu'une valeur approchée d'une des racines.

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$ est C^1 et $f'(x) = 3x^2 - 3 \geqslant 0 \iff x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$. On a $f(-1) = 3$ et $f(1) = -1$. On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

   IL suffit donc d'appliquer trois fois le théorème de la bijection, une fois sur chacun des intervalles sur lesquels f est strictement monotone, comme $f(x)$ change de signe sur chacun des intervalles.
   Donc (E) admet trois solutions réelles α, β et γ telles que $\alpha < -1 < \beta < 1 < \gamma$

2. Obtention d'approximation de β.

   (a) $f(0) = 1 \geqslant 0 = f(\beta)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} \leqslant 0 = f(\beta)$ et ces trois valeurs de départ appartiennent à l'intervalle $[-1; 1]$. Donc, comme f est strictement décroissante sur cet intervalle, on a bien $\beta \in \left[[0, \frac{1}{2}\right]$.
   Enfin, par manipulation algébrique classique (et facile) :
   β est aussi solution de l'équation $\frac{x^3+1}{3} = x$

   (b) g est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = x^2 > 0$ dès que $x \neq 0$. Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $g\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[g(0); g\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \left[\frac{1}{3}; \frac{3}{8}\right] \subset \left[0; \frac{1}{2}\right]$. L'intervalle est bien stable par g.
   De plus, $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \quad |g'(x)| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

   (c) Par récurrence classique, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

   (d) IAF+récurrence avec $|u_0 - \beta| \leqslant \frac{1}{2}$ car les deux valeurs sont dans l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

   (e) C'est comme dans l'exercice précédent...

Exercice 13

1. (a) f est de classe C^1 en tout x tel que $e^x - 1 \neq 0$ donc sur $]0; +\infty[$. (quotient de fonctions C^1) et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} = \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x-1)^2}$.

   (b) f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions de classe C^2 et $\forall x \in]0; +\infty[$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(1-x-1)e^x(e^x-1)^2 - 2\left[(1-x)e^x - 1\right](e^x-1)e^x}{(e^x-1)^4} \\
&= \frac{(e^x-1)\left[-xe^x(e^x-1) - 2\left[(1-x)e^x - 1\right]e^x\right]}{(e^x-1)^4} \\
&= \frac{-xe^{2x} + xe^x - 2\left[e^{2x} - xe^{2x} - e^x\right]}{(e^x-1)^3} \\
&= \frac{e^x}{(e^x-1)^3}\left(xe^x - 2e^x + x + 2\right)
\end{aligned}$$

(c) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = xe^x + e^x - 2e^x + 1 = (x-1)e^x + 1$
g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g"(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$ d'où les variations et les signes :

x	0	$+$	$+\infty$
$g"(x)$	0	$+$	
$g'(x)$	0	$\nearrow +$	
$g(x)$	0	$\nearrow +$	

et pour f :

x	0	$+$	$+\infty$
$g(x)$	0	$+$	
$e^x - 1$	0	$\nearrow +$	
$f"(x)$	0	$+$	
$f'(x)$	$-1/2$	$\nearrow -$	0
$f(x)$	1	$\searrow$	0

(d) On admet que $f'(x) \underset{x\to 0^+}{\to} -\dfrac{1}{2}$.

$f'(x) = \dfrac{(1-x)e^x - 1}{(e^x-1)^2} = \dfrac{xe^x\left[\left(-1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{xe^x}\right]}{e^{2x}(1-1/e^x)^2} = \dfrac{x\left[\left(-1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{xe^x}\right]}{e^x(1-1/e^x)^2}$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ par croissances comparées.

Comme f' est croissante et tend vers 0 en $+\infty$, elle est strictement négative et f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$

En $+\infty$: $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} = \dfrac{x}{e^x(1-1/e^x)} \to 0$ par croissances comparées.

2. (a) D'après les variations f on a $\forall x \in [0;+\infty[, \quad 0 \leq f(x) \leq 1$
D'après les variations de f', on a pour tout $x \in [0;+\infty[, \quad -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$ donc

$$\forall x \in [0;+\infty[, \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leq f(x) \leq 1$$

(b) On procède par équivalence pour résoudre l'équation : 0 n'est pas solution et pour $x \neq 0$

$$\begin{aligned} f(x) = x \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{e^x - 1} = x \\ &\Leftrightarrow \quad 1 = e^x - 1 \quad \text{car } x \neq 0 \text{ et } e^x - 1 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2 = e^x \\ &\Leftrightarrow \quad x = \ln(2) \ \text{ car } \exp \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

donc $\ln(2)$ est l'unique solution de cette équation.

(c) On applique alors l'inégalité des accroissements finis :
On montre tout d'abord que pour tout entier n, $u_n \in [0+\infty[$
Pour $n = 0$, $\quad u_0 = 0 \in [0+\infty[$
Soit $n \geq 0$ tel que $u_n \in [0+\infty[$ alors, comme $f \geq 0$ sur $[0+\infty[$, $\quad f(u_n) \geq 0$ et $u_{n+1} \in [0+\infty[$.
Donc pour tout entier n, $u_n \in [0+\infty[$
De plus $\ln(2) \in [0+\infty[$
Et $|f'| \leq \frac{1}{2}$ sur $[0+\infty[$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \ln 2| = |f(u_n) - f(\ln 2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|$$

(d) On a alors par récurrence, pour tout entier $n, 0 \leq |u_n - \ln(2)| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

Et par encadrement $u_n - \ln(2) \longrightarrow 0$ et donc $u_n \longrightarrow \ln(2)$

Exercice 14

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{10000 + x}$ est C^1 sur l'intervalle $[0;1]$. Comme $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{10000+x}}$ est décroissante, on a, sur cet intervalle $\dfrac{1}{201} \dfrac{1}{2\sqrt{10000+1}} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{10000}} = \dfrac{1}{200}$.

Par conséquent, d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à l'intervalle $[0;1]$, on obtient :
$\dfrac{1}{201}(1-0) \leqslant f(1) - f(0) \leqslant \dfrac{1}{200}(1-0) \iff \dfrac{1}{201} \leqslant A \leqslant \dfrac{1}{200}$.

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est C^1 sur l'intervalle $[0; 0,01]$. Comme $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ est croissante, on a, sur cet intervalle $1 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{0,99^2} =$.

Par conséquent, d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à l'intervalle $[0; 0,01]$, on obtient : $1(0,01-0) \leqslant f(1) - f(0) \leqslant \dfrac{1}{0,99^2}(0,01-0) \iff \dfrac{1}{100} \leqslant B \leqslant \dfrac{100}{99^2} \approx \dfrac{1}{99}$.

On peut aussi prendre $\dfrac{1}{x}$ come fonction, il faut modifier l'intervalle en conséquence, et faire attention à l'hypothèse $a \leqslant b$ pour appliquer l'IAF.

Pour $C = \ln(1,01)$, $\ln(x)$ ou encore $\ln(1+x)$ permettent de reprendre le même schéma.

Exercice 15

1. Soit $n \geq 1$. La fonction ln est C^1 sur l'intervalle $[n; n+1]$.
   Sur cet intervalle, $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln'(x) = \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{n}$.
   Donc, d'après l'IAF : $\dfrac{1}{n+1}(n+1-n) \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \dfrac{1}{n}(n+1-n)$, ce qui donne la double inégalité demandée.
2. On a donc, en sommant les inégalités de droite de la question précédente : $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \geq \sum\limits_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1)$, la dernière égalité résultant d'un téléscopage et de $\ln(1) = 0$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$, par comparaison de limites dans l'inégalité précédente (car il est clair que le membre de droite diverge vers $+\infty$)

Exercice 16

(1) L'équation de la tangente à la courbe de ln en 1 est $y = x-1$ et ln est concave donc pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ on a $\ln(x) \leqslant x-1$, en particulier l'inégalité est vraie pour tout $x \in [1\,;2]$.
Pour tout $x \in [1\,;2]$, $x = t \times 1 + (1-t) \times 2$ avec $t = 2-x \in [0\,;1]$. En vertu de la concavité de ln, on a $t \ln 1 + (1-t) \ln 2 \leqslant \ln x$, soit $(x-1)\ln 2 \leqslant \ln x$.
Donc $\forall x \in [1\,;2],\ (x-1)\ln(2) \leqslant \ln(x) \leqslant x-1$.

(2) L'équation de la tangente à la courbe de exp en 0 est $y = x+1$ et exp est convexe donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x+1 \leqslant \exp(x)$, en particulier l'inégalité est vraie pour tout $x \in [0\,;1]$.
Pour tout $x \in [0\,;1]$, $x = t \times 1 + (1-t) \times 0$ avec $t = x \in [0\,;1]$. En vertu de la convexité de exp, on a $\exp(x) \leqslant t\exp(1) + (1-t)\exp(0)$, soit $\exp(x) \leqslant ex + 1 - x = (e-1)x + 1$.
Donc $\forall x \in]0\,;1],\ x+1 \leqslant \exp(x) \leqslant (e-1)x+1$.

Exercice 17

1. La fonction f est de classe C^∞ sur $]1\,;+\infty[$ d'après les théorèmes généraux car ln est strictement positive sur $]1\,;+\infty[$ et de classe C^∞. On a $f"(x) = \left(\dfrac{1}{x\ln x}\right)' = -\dfrac{\ln x + 1}{(\ln x)^2}$. Comme $\ln x$ et $(\ln x)^2$ sont strictement positifs pour tout $x \in]1\,;+\infty[$, $f"$ est strictement négative sur $]1\,;+\infty[$. Donc f est concave.
2. Comme ln est croissante, il suffit de montrer que
$$\forall (x;\ y) \in]1\,;+\infty[^2; \ln\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \geqslant \ln\left(\sqrt{\ln(x)\ln(y)}\right).$$
On a $\ln\left(\ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\right) = f\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2}\right)$, $\ln\left(\sqrt{\ln(x)\ln(y)}\right) = \dfrac{f(x)}{2} + \dfrac{f(y)}{2}$ et $f\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2}\right) \geqslant \dfrac{f(x)}{2} + \dfrac{f(y)}{2}$ car f est concave. Il en résulte que $\forall (x;\ y) \in]1\,;+\infty[^2; \ln\left(\ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\right) \geqslant \ln\left(\sqrt{\ln(x)\ln(y)}\right)$.
Donc $\forall (x;\ y) \in]1\,;+\infty[^2; ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$.

Exercice 18

Soit f la fonction définie sur $[0\,;1[$ par $f(0)=0$ et, pour tout $x>0$, $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0\,;1[$.
   La fonction f est continue sur $]0\,;+\infty[$ d'après les théorème généraux sur la continuité. De plus on a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\ln x}=0=f(0)$, d'où la continuité de f en 0. Donc f est continue sur $]0\,;+\infty[$.
2. Étudier les variations de f sur $[0\,;1[$.
   La fonction f est dérivable sur $]0\,;1[$ d'après les théorème généraux et pour tout $x\in\,]0\,;1[$ on a $f'(x)=-\dfrac{1}{x(\ln x)^2}<0$. Donc f est strictement décroissante sur $[0\,;1[$.
3. On a $f"(x)=\dfrac{(\ln x)^2+2\ln x}{(x\ln^2 x)^2}$. Le signe de $f"$ est celui de $\ln x)^2+2\ln x$ car $(x\ln^2 x)^2>0$ sur $]0\,;1[$.
   La fonction $f"$ n'a pas un signe constant sur $]0\,;1[$,elle est positive sur $]0\,;\dfrac{1}{e^2}[$ et négative sur $]\dfrac{1}{e^2}\,;1[$. Donc f n'est ni convexe ni concave.
4. Montrer que f possède un unique point d'inflexion et déterminer la tangente de f en ce point.
   La fonction $f"$ ne s'annule qu'en $\dfrac{1}{e^2}$, de plus $f"$ est strictement positive sur $]0\,;\dfrac{1}{e}[$ et $f"$ strictement négative sur $]\dfrac{1}{e^2}\,;+\infty[$. Donc le point d'abscisse $\dfrac{1}{e}$ est l'unique point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.
   Déterminons l'équation de la tangente au point d'abscisse $\dfrac{1}{e^2}$.
   On a $f(\dfrac{1}{e^2})=\dfrac{1}{\ln\frac{1}{e^2}}=-\dfrac{e^2}{4}$ et $f'(\dfrac{1}{e^4})=-\dfrac{1}{2}$. Donc l'équation de la tangente au point d'abscisse $\dfrac{1}{e^2}$ est $y=-\dfrac{e^2}{4}(x-\frac{1}{e^2})-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{e^2}{4}x-\dfrac{1}{4}$.
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Pour aller plus loin

Exercice 19

Soit $p>1$ un nombre entier. On définit la suite $(R_n)_{n\geqslant 1}$ par

$$R_n=\sum_{k=n+1}^{pn}\frac{1}{k}.$$

Le but de cet exercice est de calculer la limite de la suite $(R_n)_{n\geqslant 1}$.

1. Soit x un nombre strictement positif. La fonction ln est dérivable sur $[x\,;x+1]$ et pour tout $t\in[x\,;x+1]$ on a $\dfrac{1}{x+1}\leqslant \ln'(t)=\dfrac{1}{t}\leqslant\dfrac{1}{x}$. Donc on a d'après l'IAF
   $$\frac{1}{1+x}\leqslant \ln(1+x)-\ln(x)\leqslant\frac{1}{x}$$
   Soit $k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Pour $x=k$ le membre droit de l'inégalité ci-dessus donne $\ln(k+1)-\ln(k)\leqslant\frac{1}{k}$ et pour $x=k-1$ celui de gauche donne $\frac{1}{k}\leqslant\ln(k)-\ln(k-1)$.
   Donc pour tout $k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$,
   $$\ln(1+k)-\ln(k)\leqslant\frac{1}{k}\leqslant\ln(k)-\ln(k-1)$$
2. Il résulte de 1) que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{pn}\ln(1+k)-\ln(k)\leqslant\sum_{k=n+1}^{pn}\frac{1}{k}\leqslant\sum_{k=n+1}^{pn}\ln(k)-\ln(k-1)$. Ce qui donne par télescopage $\ln(1+pn)-\ln(n+1)\leqslant\displaystyle\sum_{k=n+1}^{pn}\frac{1}{k}\leqslant\ln(pn)-\ln(n)$.
   Donc $\ln\left(\dfrac{1+pn}{n+1}\right)\leqslant R_n\leqslant\ln(p)$.

3. La fonction ln est continue et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1+pn}{n}\right) = p$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+pn}{n} = \ln(p)$. Ceci joint à 2) et le théorème d'encadrement donne $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = \ln(p)$

Exercice 20

Calculons la dérivée n-ième de

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}, x \mapsto \frac{1}{1+x} \text{ puis } x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$$

On commence par calculer les premier dérivées, on conjecture puis on démontre la conjecture par récurrence. $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)'' = \dfrac{3!}{(1-x)^3}$.

Montrons par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

Pour $n = 0$, $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(0)} = \dfrac{0!}{(1-x)^{0+1}}$.

Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

Montrons que $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(n+1)} = \dfrac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$.

On a $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(n+1)} = \left(\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(n)}\right)' = \left(\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right)' = \dfrac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$.

De même on a $\left(\dfrac{1}{1+x}\right)' = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$, $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)'' = (-1)^n \dfrac{2!}{(1-x)^3}$. Montrons par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$

On a $\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{(n+1)} = \left(\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{(n)}\right)' = \left(\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}\right)' = (-1)^{n+1} \dfrac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$.

Exercice 21

Montrons par récurrence : $P(n)\ :\ \left(x^{n-1}\mathrm{e}^{1/x}\right)^{(n)} = (-1)^n x^{-(n+1)}\mathrm{e}^{1/x}$.

Initialisation : $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies (facile à vérifier).

Hérédité : Supposons pour un entier $n \geqslant 1$ $P(n-1)$ et $P(n)$ sont vraies, montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a

$$
\begin{aligned}
\left(x^n\mathrm{e}^{1/x}\right)^{(n+1)} &= \left(\left(x^n\mathrm{e}^{1/x}\right)'\right)^{(n)} \\
&= \left(nx^{n-1}\mathrm{e}^{1/x} - x^{n-2}\mathrm{e}^{1/x}\right)^{(n)} \\
&= \left(nx^{n-1}\mathrm{e}^{1/x}\right)^{(n)} - \left(x^{n-2}\mathrm{e}^{1/x}\right)^{(n)} \\
&= (-1)^n nx^{-(n+1)}\mathrm{e}^{1/x} - \left(x^{n-2}\mathrm{e}^{1/x}\right)^{(n)} \text{ (car } P(n) \text{ est supposée vraie)} \\
&= (-1)^n nx^{-(n+1)}\mathrm{e}^{1/x} - \left(\left(x^{n-2}\mathrm{e}^{1/x}\right)^{(n-1)}\right)' \\
&= (-1)^n nx^{-(n+1)}\mathrm{e}^{1/x} - \left((-1)^{n-1}x^{-n}\mathrm{e}^{1/x}\right)' \text{ (car } P(n-1) \text{ est supposée vraie)} \\
&= (-1)^n nx^{-(n+1)}\mathrm{e}^{1/x} - (-1)^{n-1}\left(-nx^{-(n+1)}\mathrm{e}^{1/x} - x^{-(n+2)}\mathrm{e}^{1/x}\right) \\
&= \cancel{(-1)^n nx^{-(n+1)}\mathrm{e}^{1/x}} - \cancel{(-1)^n nx^{-(n+1)}\mathrm{e}^{1/x}} - (-1)^n x^{-(n+2)}\mathrm{e}^{1/x} \\
&= (-1)^{n+1}x^{-(n+2)}\mathrm{e}^{1/x}
\end{aligned}
$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left(x^{n-1}\mathrm{e}^{1/x}\right)^{(n)} = (-1)^n x^{-(n+1)}\mathrm{e}^{1/x}$.