Exercice 1 (Bac S, Amérique du sud, novembre 2005, extraits)**.** *Alain fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02.*

On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5 \times 10^{-4}$ et que la durée de vie T_2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$ (on pourra se reporter au formulaire ci-dessous).

Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard.

1. *Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement est $\mathbb{P}(T \geqslant t) = 0,02e^{-5\times 10^{-4}t} + 0,98e^{-10^{-4}t}$.*
2. *Sachant que le composant acheté est en état de fonctionner 1000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ?*

Exercice 2. *Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$. Reconnaître la loi de $T = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-X)$. En déduire comment simuler une loi exponentielle sous Scilab.*

Exercice 3. $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$ *et* $Y = \mathrm{e}^X$

Déterminer F_Y en fonction de Φ, puis déterminer une densité f_Y et calculer enfin $E(Y)$, si elle existe, à l'aide d'un changement de variable.

Exercice 4 (EML 2006, exercice3, partie A)**.**

1. *Soit U une variable aléatoire à densité suivant une loi normale d'espérance nulle et de variance $\frac{1}{2}$*
   (a) *Rappeler une densité de U*
   (b) *En utilisant une intégration par partie, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}dx$ est convergente et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$*

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \forall x \leq 0, \quad F(x) = 0 \\ \forall x > 0, \quad F(x) = 1 - e^{-x^2} \end{cases}$

2. *Montrer que la fonction F définit une fonction de répartition de variable aléatoire dont on déterminera une densité f.*
3. *Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.*
   (a) *Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et que $E(X) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.*
   (b) *Déterminer, pour tout réel y, la probabilité $\mathrm{P}\left(X^2 \leq y\right)$.* On distinguera les cas $y \leq 0$ et $y > 0$.
   (c) *Montrer que la variable aléatoire X^2 suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.*

Exercice 5 (inspiré d'Ecricome 2009)**.** *Une municipalité a lancé une étude concernant les problèmes liés aux transports.*

A. Retards à un arrêt de bus.

On note X la variable aléatoire qui vaut le temps de retard (ou d'avance) d'un bus à un arrêt donné. L'étude a montré que le retard moyen du bus est de 5 minutes et que la probabilité que ce retard soit inférieur à 7 minutes est égale à $p = 0,8413$. On suppose que X suit une loi normale

1. *Montrer que $P(X \leqslant 7) = \Phi(\frac{2}{\sigma})$. En utilisant la table fournie en annexe, déduire les valeurs de l'écart-type puis de la variance de X.*
2. *Déterminer les probabilités :*
   ⋆ *que le bus ait plus de 9 minutes de retard*
   ⋆ *que le bus ait entre 2 minutes et deux minutes et demi de retard.*
   ⋆ *que le bus arrive exactement 5 minutes en retard.*

B. Appels reçus par le standard d'une société de taxis.

Le nombre Y_t d'appels reçus par le standard pendant une durée t suit une loi de poisson de paramètre $(\lambda \cdot t)$. Alice travaille à ce standard. On note T le temps attendu avant de recevoir son premier appel à partir du moment où elle prend son poste.

Par convention : $P(T < t) = 0$ si $t < 0$.

1. *Rappeler la loi, l'espérance et la variance de* Y_t.
2. ***Pour cette question uniquement****, on considère que* $t = 60$ *minutes.*
   (a) *En utilisant la valeur de* $E(Y_1)$*, interpréter la valeur du paramètre* λ.
   (b) *Alice ne reçoit qu'un appel en une heure. On numérote les minutes de* 0 *à* 59 *et on note* M *la minute où cet appel se produit. Déterminer l'espérance et la variance de* M *en reconnaissant une loi usuelle.*
3. *Décrire en une phrase les événements* $[Y_t = 0]$ *et* $[T > t]$.
   Déduire $P(T > t)$ *puis* $P(T \leqslant t)$ ***lorsque*** t ***est positif.***
4. *Expliciter la fonction de répartition* F_T *de* T *sur* $\mathbb{R}$.
5. *Montrer alors que* T *est une variable à densité, et en préciser une densité.*
6. *Reconnaître une loi usuelle et déduire l'espérance de* T.
7. *Pour quelle valeur de* λ *la probabilité qu'Alice reçoive un appel dans la première minute est-elle inférieure à une chance sur dix ?*
8. *Exprimer à l'aide des données de l'énoncé, la probabilité sachant qu'Alice n'a pas reçu d'appels dans les* m *premières minutes, qu'Alice n'en reçoive pas non plus dans la minute qui suit.*