Exercice 1

I) Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 (t^2+3t)dt$ 2. $\int_0^1 \frac{t-3}{2}dt$ 3. $\int_0^1 e^{2x-1}dx$ 4. $\int_0^1 \frac{1}{t-2}dt$ 5. $\int_0^1 2ue^{u^2-1}du$ 6. $\int_0^1 \frac{3e^t}{e^t+1}dt$ 7. $\int_0^1 \frac{e^t}{(e^t+1)^2}dt$
8. $\int_e^{e^2} \frac{1}{u}(\ln u)^2 du$

II) Calculer les intégrales en utilisant une Intégration par parties (IPP) :

1. $\int_1^{\mathrm{e}} (3t^2+2t-2)\ln t dt$ 2. $\int_0^1 (t-2)^2 e^t dx$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les intégrales suivantes : 1. $I = \int_0^n \lfloor t \rfloor dt$ 2. $J = \int_0^n \lfloor t \rfloor^2 dt$ 3. $K = \int_1^n \ln\left(1 - \frac{1}{\lfloor t \rfloor + 1}\right) dt$

Exercice 3

Calculer $\int_0^2 |t^3 - 2t^2 + 2t - 1| dt$.

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variables indiqué.

1. $I = \int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}dx$en posant $x = \ln t$, puis en utilisant que $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$.
2. $J = \int_{-1}^0 \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}dx$ en posant $t = \sqrt{1-x}$.

Exercice 5

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+2}}dt$ $J = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{t^2+2}}dt$, $K = \int_0^1 \sqrt{t^2+2}dt$, $L = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+2}}dt$.

1. Justifier l'existence de ces intégrales, et calculer L.
2. Montrer que $J + 2I = K$. *En 3 lignes, et sans calcul !*
3. Montrer par intégration par parties que $K = \sqrt{3} - J$. ($\forall t \in \mathbb{R}, \sqrt{t^2+2} = 1 \times \sqrt{t^2+2}$)
4. Montrer à l'aide du changement de variables $x = t + \sqrt{t^2+2}$ que $I = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2})$
   Justifier et utiliser que $\frac{1}{\sqrt{t^2+2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+2}}} = \frac{1}{t+\sqrt{t^2+2}}$ *lors de l'étape de remplacement de t*
5. Déduire des trois questions précédentes les valeurs de J et K.

Exercice 6

Soit f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.
   Établir que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
3. (a) Montrer que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.
   (b) En déduire les variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \displaystyle\int_n^{2n} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (a) Montrer que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-2n}\right)$.
   (c) En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$. Étudier le signe de sa fonction dérivée f', sa limite éventuelle en $+\infty$, et dresser le tableau de ses variations.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par son terme général $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (a) Justifier que, si $n \leqslant x \leqslant n+1$, alors $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$.
   (b) Montrer, sans chercher à calculer u_n, que, pour tout entier naturel n, $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. Soit F la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = [\ln(x+3)]^2$.
   (a) Justifier la dérivabilité sur $[0\ ;\ +\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x, le nombre $F'(x)$.
   (b) On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$. Calculer I_n.
4. On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$. Calculer S_n. La suite (S_n) est-elle convergente ?

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leqslant \frac{1}{k}$.
2. En déduire que $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln n}$.

Exercice 9

1. Étudier la monotonie des suites de termes généraux suivants :
   $a_n = \displaystyle\int_0^n e^{-t^3}dt$, $b_n = \displaystyle\int_0^{-n} e^{t^3}dt$, $c_n = \displaystyle\int_0^1 x^2 e^{nx^3}dx$.
2. Étudier la monotonie de $\int_0^1 (-t)^n dt$. Étudier sa limite à l'aide de l'inégalité triangulaire.

Exercice 10

Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x t^2 e^t dt$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et préciser $f(0)$.

Exercice 11

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t dt$

1. Calculer I_0, I_1.
2. En encadrant grossièrement $(1-t)^n e^t$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{n!}$ puis Étudier la convergence de (I_n)
3. Montrer à l'aide d'une IPP que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = I_n - \dfrac{1}{(n+1)!}$
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et déduire la limite de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 12

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln(1+t^2) dt$

1. Étudier la monotonie des suites (I_n) et (J_n)
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Étudier la convergence.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, J_n = \dfrac{\ln 2}{n+1} - \dfrac{2}{n+1} I_{n+2}$
4. Étudier la convergence de (J_n) et (nJ_n)

Exercice 13

Posons pour $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sqrt{1-x}$

1. Montrer que (I_n) est décroissante, puis qu'elle converge. 2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Qu'en déduire ?
3. Montrer à l'aide d'une IPP que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5} I_n$ (*On pourra utiliser que* $(1-x)^{\frac{3}{2}} = (1-x)\sqrt{1-x}$)
4. Calculer I_0 puis déduire une expression de I_1, I_2, puis de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 14

On définit $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

1. Justifier l'ensemble de définition de F, puis étudier son signe et ses variations.
2. On définit g sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = F(x) - \ln x$.
   (a) En écrivant, $\ln x$ sous la forme $\displaystyle\int u(t) dt$ où u et les bornes sont bien choisies, étudier le signe de g sur $\mathbb{R}_*^+$
   (b) Déduire les limites de F en 0 et $+\infty$.
   (c) On admet que $\forall t \in \mathbb{R}^+, e^t \geqslant t$. Déduire, d'une autre façon, le comportement asymptotique de F en $+\infty$.
3. Étudier la convexité de F.
4. Tracer l'allure de la courbe de F.

Exercice 15

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2} dt$

1. Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$, étudier son signe, puis sa parité (à l'aide d'un changement de variable)
2. Justifier que g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$
   On pourra utiliser une primitive F de $t \mapsto e^{-t^2}$ dont on justifiera l'existence
3. Étudier les variations de g
4. Montrer que : $\forall x > 0, xe^{-4x^2} \leqslant g(x) \leqslant xe^{-x^2}$ et déduire la limite de g en $+\infty$.

Exercice 16

On définit la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt$

1. Justifier que F est bien définie sur $]-1;+\infty[$
2. Étudier le signe de F sur $]-1;+\infty[$
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$ puis étudier ses variations.
   Retrouver le résultat de la question précédente.
4. Montrer que : $\forall t \geqslant 1, \dfrac{t}{\sqrt{t+1}} \geqslant \dfrac{\sqrt{t}}{2}$. Déduire la limite de F en $+\infty$, puis la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt$
5. Étudier la convexité de F sur $]-1;+\infty[$ et l'existence éventuelle de points d'inflexion.
6. On admet que F est prolongeable par continuité en -1 et $F(-1) = \frac{4}{3}$. Calculer la limite de F' en -1 et interpréter.
7. Tracer l'allure de la courbe de F en tenant compte de toutes les questions précédentes. Placer au minimum les points d'abscisse -1 et 0.
8. **Calcul de F.** *On se propose de calculer $F(x)$ par deux méthodes différentes. L'expression obtenue n'est pas exactement identique dans les deux cas.*
   (a) **Méthode 1 :** A l'aide d'une intégration par parties, calculer $F(x)$.
   (b) Montrer à l'aide d'un changement de variable bien choisi que pour tout $\forall x > -1 : F(x) = \displaystyle\int_1^{x+1} (\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}) du$
   (c) **Méthode 2 :** Calculer alors la valeur de $F(x)$ pour tout $x > 1$.