Exercice 1

Dans $\mathcal{M}_{3,\ 1}(\mathbb{R})$, on pose $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Écrire les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire de $e_1,\ e_2$ et e_3.

Exercice 2

Dans $\mathcal{M}_{3,\ 1}(\mathbb{R})$, on pose $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Parmi les vecteurs suivants, repérer ceux qui sont combinaison linéaire de e_1 et e_2 puis expliciter la combinaison linéaire correspondante :

$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$

Exercice 3

Dans $\mathcal{M}_{3,\ 1}(\mathbb{R})$, on pose pour tout réel k : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ k \end{pmatrix}$. Déterminer k pour que le vecteur $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ soit combinaison linéaire des vecteurs e_1 et e_2.

Exercice 4

Parmi les espaces suivants, déterminer ceux qui sont des espaces vectoriels :

1. $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,\ 1}(\mathbb{R}),\ x_1 + x_2 = 1 \right\}$
2. $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,\ 1}(\mathbb{R}),\ x_1 = 2x_2 \right\}$
3. $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,\ 1}(\mathbb{R}),\ x_1 x_2 = 0 \right\}$
4. $F_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,\ 1}(\mathbb{R}),\ x_1^2 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$
5. $F_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,\ 1}(\mathbb{R}),\ x_1 + x_2 = 0 \text{ et } x_1 - x_3 = 0 \right\}$

Exercice 5

On se place dans $\mathcal{M}_{3,\ 1}(\mathbb{R})$ et on considère les vecteurs suivant :

$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que u et v sont des vecteurs de $Vect(s,\ t)$.
   (b) En déduire que $Vect(u,\ v) \subset Vect(s,\ t)$.
2. De la même façon, montrer que $Vect(s,\ t) \subset Vect(u,\ v)$.

Exercice 6

Déterminer, parmi les familles suivantes, celles qui sont des bases de $\mathcal{M}_{3,\ 1}(\mathbb{R})$.

$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{B}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$,
$\mathcal{B}_4 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{B}_5 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

Exercice 7

1. (a) Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,\ 1}(\mathbb{R})$.

   (b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans cette base.

2. (a) Montrer que la famille de vecteurs $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

   est une base de $\mathcal{M}_{4,\ 1}$.

   (b) Quelles sont les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 8

1. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,\ 1}(\mathbb{R})$ engendré par les vecteurs :
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$;
2. Même question avec le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,\ 1}(\mathbb{R})$ engendré par les vecteurs :
$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 9

1. On considère dans $\mathcal{M}_{3,\ 1}(\mathbb{R})$ les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

   et $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. La famille $(u,\ v)$ est-elle une base de $\mathcal{M}_{3,\ 1}(\mathbb{R})$?
2. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $F = Vect(u,\ v)$? La famille $(u,\ v)$ en est-elle une base ?
3. Le vecteur $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ appartient-il à F? Si oui, quelles sont ses coordonnées dans la nouvelle base $(u,\ v)$?
4. Mêmes questions avec le vecteur $y = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$?

Exercice 10

Par la méthode des espaces engendrés par une partie, une base de chacun des espaces vectoriels suivants

1. $A = \{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\left\{ \begin{array}{c} 2a - 5b + c = 0 \\ b + c = 0 \end{array} \right. \}$
2. $B = \{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ telle que $\left\{ \begin{array}{c} \alpha + \gamma - 2\delta = 0 \\ \alpha + \beta + \delta = 0 \\ 2\alpha - \beta + 3\gamma = 0 \end{array} \right. \}$
3. $C = \{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\left\{ \begin{array}{c} 4a - 2b + c = 0 \\ -2a + 4b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{array} \right. \}$.
4. $D = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = -X\}$
5. $E = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} X = 6X\}$
6. $F = \{X \in \mathcal{M}_{3}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} X = 4X\}$
7. $G = \{X \in \mathcal{M}_{2}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2X\}$

Exercice 11

Soient E, F deux espaces vectoriels et f une application de E dans F.
Pour chacune des applications suivantes,

- ⋆ justifier que f est linéaire.
- ⋆ expliciter une matrice A telle que $\forall X \in E, \quad f(X) = AX$
- ⋆ donner une base de $\ker(f)$, le noyau de f..

1. $E = F = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ avec $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$
2. $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $F = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ avec $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x + y + z \end{pmatrix}$.
3. $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $F = \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ avec $f : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a - 2b \\ 2a + b \\ a - b \\ b \end{pmatrix}$
4. $E = F = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x - 6z \\ 3x + y + 3z \\ 3x + 4z \end{pmatrix}$

Exercice 12

On considère deux matrices A et B telles que $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ainsi que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX - XB \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Expliciter une base de $\ker(f)$.

   (a) lorsque $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   (b) lorsque $n = 2$ et $A = B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

   (c) lorsque $n = 3$ et $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   (d) lorsque $n = 3$ et $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   (e) lorsque $n = 3$ et $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (f) lorsque $n = 3$ et $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 13 (ECRICOME 1995)

Soit $A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -18 & -4 & 5 \\ 30 & 8 & -7 \end{pmatrix}$.

1. Les matrices A, $A - I_3$ et $A - 4I_3$ sont-elles inversibles ?
2. Montrer que $V_0 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ A.X = 0_{3,1}\}$ est un espace vectoriel.
   Justifier que V_0 possède une base constituée d'un seul vecteur, que l'on notera e_1.
3. On admet que $V_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ AX = X\}$ et $V_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ AX = 4X\}$ sont des espaces vectoriels.
   Justifier que V_1 (resp. V_4) possède une base constituée d'un seul vecteur, que l'on notera e_2 (resp. e_3).
4. La famille (e_1, e_2, e_3) est-elle une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?
5. Si l'on note $e_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} h \\ i \\ j \end{pmatrix}$, on pose $P = \begin{pmatrix} a & e & h \\ b & f & i \\ c & g & j \end{pmatrix}$.

   (a) Justifier que la matrice P est inversible et donner son inverse P^{-1}.

   (b) Déterminer l'unique matrice T telle que $A = PTP^{-1}$.

Exercice 14 (ECRICOME 2003)

On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x - 2y + 3z \\ x + 2z \\ 2z \end{pmatrix} \end{array} \right.$

1. Justifier que f est une application linéaire et déterminer une matrice A telle que $\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad f(X) = AX$.
2. Montrer que les ensembles $E_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = X\}$ et $E_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(x) = 2X\}$ sont des espaces vectoriels.
3. Justifier que chacun de ces espaces possède une base constituée d'un unique vecteur, que l'on notera e_1 pour E_1 et e_2 pour E_2.
4. Déterminer un vecteur e_3 tel que $f(e_3) = 2e_3 + e_2$.
5. Justifier que la famille (e_3, e_2, e_1) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

6. Si l'on note $e_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} h \\ i \\ j \end{pmatrix}$, on pose $P = \begin{pmatrix} a & e & h \\ b & f & i \\ c & g & j \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que la matrice P est inversible et donner son inverse P^{-1}.
   (b) Déterminer l'unique matrice T telle que $A = PTP^{-1}$

Exercice 15(ECRICOME 1991)

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$. On considère l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$

1. Montrer que $V = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = X\}$ est un espace vectoriel.
   Justifier que V possède une base constituée d'un seul vecteur, que l'on notera e_1.
2. Déterminer un vecteur $e_2 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $f(e_2) = e_2 + e_1$.
3. Déterminer un vecteur $e_3 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $f(e_3) = e_3 + e_2$.
4. La famille (e_1, e_2, e_3) est-elle une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?
5. Si $e_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} h \\ i \\ j \end{pmatrix}$, on pose $P = \begin{pmatrix} a & e & h \\ b & f & i \\ c & g & j \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que la matrice P est inversible et donner son inverse P^{-1}.
   (b) Déterminer l'unique matrice T telle que $A = PTP^{-1}$.

Exercice 16

1. Pour chacune des matrices A suivantes, déterminer les réels λ tels que la matrice $A-\lambda I$ soit non inversible :
   a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, e) $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 7 \\ -1 & 6 & 9 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$
2. Pour chacune des matrices A de la question 1 et pour chacune des valeurs de λ suivantes, déterminer une base de l'espace vectoriel
   $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\quad AX = \lambda X\}$.
   a) $\lambda \in \{-1, 2, 5\}$ b) $\lambda \in \{-1, 0, 3\}$ c) $\lambda \in \{0, 2\}$
   d) $\lambda \in \{-1, 1, 3\}$ e) $\lambda \in \{-1, 1\}$
3. Pour la matrice A du 1.e), déterminer un vecteur e_3 tel que $Ae_1 = e_1 + e_2$, où e_2 est un vecteur générateur de E_1.

Exercice 17

Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, λ un nombre réel et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX_0 = \lambda X_0$.

1. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N},\quad A^n X_0 = \lambda^n X_0$.
2. On suppose qu'il existe trois réels a, b, c tels que $A^3 + aA^2 + bA + cI_n = 0_n$.
   Si X_0 est un vecteur non nul, justifier que $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.
3. Applications :
   (a) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2 = 2A$.
   Montrer que si λ un nombre réel et $X_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur non nul tel que $AX_0 = \lambda X_0$ alors $\lambda^2 = 2\lambda$. En déduire les valeurs de λ.
   Déterminer des bases de $E_0 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\quad AX = 0_{3,1}\}$ et $E_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\quad AX = 2X\}$.

On considère $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible, calculer P^{-1} et vérifer que $A = PDP^{-1}$. avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2 = A$

Montrer que si λ un nombre réel et $X_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur non nul tel que $AX_0 = \lambda X_0$ alors $\lambda^2 = \lambda$. En déduire les valeurs de λ.

Pour quelles valeurs du réel λ, la matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible ?

Déterminer des bases de $E_0 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad AX = 0_{3,1}\}$ et $E_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad AX = X\}$.

On considère $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible, calculer P^{-1} et vérifer que $A = PDP^{-1}$.

avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2 = 6A - 5I_4$.

Montrer que si λ un nombre réel et $X_0 \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur non nul tel que $AX_0 = \lambda X_0$ alors $\lambda^2 = 6\lambda - 5$. En déduire les valeurs de λ.

Pour quelles valeurs du réel λ, la matrice $A - \lambda I_4$ n'est pas inversible ?

Déterminer des bases de $E_0 = \{X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}), \quad AX = X\}$ et $E_1 = \{X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ AX = 5X\}$.

On considère $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible, calculer P^{-1} et vérifer que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 18

On considère l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a+2b \\ 2a+b \end{pmatrix} \end{array} \right.$

On considère la famille (e_1, e_2) définie par $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la famille (e_1, e_2) est une base de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
2. Exprimer $f(e_1)$ (resp. $f(e_2)$) comme combinaison linéaire de (e_1, e_2).
3. En déduire la matrice A de f dans la base (e_1, e_2). *Réponse* : $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
4. Quelle est la matrice B de f dans la base (e_2, e_1) ?
5. Montrer l'existence d'une base (h_1, h_2) de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que la matrice de f dans cette base soit la matrice $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 19

On considère l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3a+4b \\ -a-b \end{pmatrix} \end{array} \right.$

On considère la famille (e_1, e_2) définie par $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la famille (e_1, e_2) est une base de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
2. Exprimer $f(e_1)$ (resp. $f(e_2)$) comme combinaison linéaire de (e_1, e_2).
3. En déduire la matrice A de f dans la base (e_1, e_2). *Réponse* : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$
4. Quelle est la matrice B de f dans la base (e_2, e_1) ?
5. Montrer l'existence d'une base (h_1, h_2) de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que la matrice de f dans cette base soit la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 20

On considère l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R}) & \to & \mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R}) \\ (x,y,z) & \mapsto & (-y+2z, 3x+4y-2z, 3z) \end{array} \right.$

On considère la famille (e_1, e_2, e_3) définie par $e_1 = (1,1,0)$, $e_2 = (0,1,1)$, $e_3 = (1,0,1)$.

1. Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.
2. Exprimer $f(e_1)$ (resp. $f(e_2)$, resp. $f(e_3)$) comme combinaison linéaire de (e_1, e_2, e_3).
3. En déduire la matrice A de f dans la base (e_1, e_2, e_3).
4. Quelle est la matrice B de f dans la base (e_2, e_3, e_1) ?
   Quelle est la matrice C de f dans la base (e_3, e_1, e_2) ?
5. Montrer l'existence d'une base (h_1, h_2, h_3) de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ telle que la matrice de f dans cette base soit la matrice $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
6. Expliciter la matrice de changement de base de la base (e_1, e_2, e_3) dans la base (h_1, h_2, h_3).
7. Quelle est la relation entre A, D et P ? En déduire l'expression de A^n.

Exercice 21

On considère l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R}) \\ (x,y,z) & \mapsto & (x, 2x+3y+2z, z) \end{array} \right.$

On considère la famille (e_1, e_2, e_3) définie par $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (1,1,0)$, $e_3 = (1,1,1)$.

1. Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.
2. Exprimer $f(e_1)$ (resp. $f(e_2)$, resp. $f(e_3)$) comme combinaison linéaire de (e_1, e_2, e_3).
3. En déduire la matrice A de f dans la base (e_1, e_2, e_3). *Réponse* : $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. Quelle est la matrice B de f dans la base (e_2, e_3, e_1) ?
   Quelle est la matrice C de f dans la base (e_3, e_1, e_2) ?
5. Montrer l'existence d'une base (h_1, h_2, h_3) de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ telle que la matrice de f dans cette base soit la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
6. Expliciter la matrice de changement de base de la base (e_1, e_2, e_3) dans la base (h_1, h_2, h_3).
7. Quelle est la relation entre A, D et P ? En déduire l'expression de A^n.