Exercice 1. a) la fonction f est constante
b) la fonction f ne peut s'annuler qu'en 0 (mais n'y est pas forcée de s'y annuler)
c) la fonction f prend toute valeur réelle
d) la fonction f est croissante
e) la fonction f ne prend jamais deux fois la même

valeur.

Exercice 2. a) $[0\,;1[$
b) $]3\,;4[\cup]4\,;5[$
c) $\{4\}$
d) $]-\infty\,;0[\cup[2\,;+\infty[$

Exercice 3. a) $\exists x \in I,\ f(x)=0$.
b) $\forall x \in I,\ f(x)=0$
c) $\exists (x,\ y),\ f(x) \neq f(y)$.
d) $\forall x, y \in I, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
ou $\forall x, y \in I, f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$
e) $\exists a \in I, \forall x \in I, f(x) \geqslant f(a)$
f) $\forall M \in R, \exists x \in I, f(x) > M$
g) $\forall (x,y) \in I^2, f(x)=0$ et $f(y)=0 \Rightarrow x=y$.

Exercice 4. a) $\exists x \in I, f(x)=0$
b) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \neq y$
c) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I, |f(x)| > M$
d) $\exists x, y \in I, x \leqslant y$ et $f(x) > f(y)$
e) $\exists x, y \in I, f(x)=f(y)$ et $x \neq y$
f) $\exists x \in I, f(x) > 0$ et $x > 0$.

Exercice 5. a) d) et e) sont les seules assertions exactes.

Exercice 6. Soit $x \in \mathbb{Q}$. Si par l'absurde $y = x+\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ alors $\sqrt{2} = y - x \in \mathbb{Q}$, ceci est impossible. Donc $x+\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 7. Par disjonction des cas :

Cas n pair : on peut écrire $n=2p$ avec $p \in \mathbb{N}$ et alors $\dfrac{n(n^2+1)}{2} = p(n^2+1) \in \mathbb{N}$

Cas n impair : on peut écrire $n=2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$ et alors $\dfrac{n(n^2+1)}{2} = n(2p^2+2p+1) \in \mathbb{N}$

Dans les deux cas la propriété est vraie.

Exercice 8. On note (E) l'équation

$$mx^2 - 2(m+1)x + m - 1 = 0.$$

Cas où $m=0$. (E) devient $-2x-1=0$. Dans ce cas(E) admet une seule solution $x = -\dfrac{1}{2}$

Cas où $m \neq 0$.

(E) est une équation du second degré avec $\Delta = 12m+4$.

On a :

$\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in \left]-\dfrac{1}{3};\ 0\right[\cup]0;\ +\infty[$. Dans ce cas (E) admet deux solutions.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{3}$.

Dans ce cas (E) admet une unique solution.

$\Delta < 0 \Leftrightarrow m \in \left]-\infty;\ -\dfrac{1}{3}\right[$.

Dans ce cas (E) n'admet de solution.

Exercice 9. a) Supposons $\forall \varepsilon \geqslant 0, |a| \leqslant \varepsilon$.

En particulier, pour $\varepsilon = 0$, on a $|a| \leqslant 0$ donc $a = 0$.

b) Par contraposée, montrons :

$a \neq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0, |a| > \varepsilon$.

Supposons $a \neq 0$. Pour $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$ on a $\varepsilon > 0$ et $|a| > \varepsilon$

ce qui détermine un ε convenable.

Exercice 10.

1. Soit $a \in]-1\,;+\infty[$. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

   Soit $\mathcal{P}(n)$: $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

   Initialisation : on a $(1+a)^0 = 1 \geqslant 1 + 0 \times a = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité : supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier n, c'est à dire, $(1+a)^n \geqslant 1+na$, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$.

   En effet,

   $(1+a)^n \geqslant 1+na \Rightarrow (1+a)\times(1+a)^n \geqslant (1+a)(1+na) \Rightarrow (1+a)^{n+1} \geqslant 1+na+a+na^2$

   $\Rightarrow (1+a)^{n+1} \geqslant (1+(n+1)a)+na^2$

   $\Rightarrow (1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$ puisque $na^2 \geqslant 0$

   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion : la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n, soit

   $$\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geqslant 1+na$$

2. Voici un contre-exemple : si $a = -4$ et $n = 3$, on a $(1+(-4))^3 = (-3)^3 = -27 < 1+4\times(-3) = -11$.

Exercice 11.

1. Soit $P(n)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

   Initialisation : $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$, donc $P(1)$ est vraie.

   Hérédité : suposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, c'est à dire, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{(n+1)}$.

   Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}$

   En effet,

   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{n}{n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}\text{(par HR)}\\ &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{n+1}{n+2}\text{(simplification par } n+1\text{).}\end{aligned}$$

   Donc $P(n+1)$ est vraie.

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

2. Soit $P(n) : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

   Initialisation : $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{6} = \frac{1\times(1+3)}{4(1+1)(1+2)}$, donc $P(1)$ est vraie.

   Hérédité : supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, c'est à dire, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$.
   En effet,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\\ &= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\\ &= \frac{n(n+3)^2+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}\\ &= \frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}.\end{aligned}$$

   Or

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)} &= \frac{(n+1)^2(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)}\\ &= \frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}.\end{aligned}$$

   Donc $P(n+1)$ est vraie.

   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Exercice 12. Soit $P(n) : u_n = n+1$.
Initialisation : $u_0 = 1 = 0+1$, donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité : suposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire, $u_n = n+1$.
Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire,
$u_{n+1} = n+2$.
En effet, on a :
$u_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right) u_n$
$= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)(n+1)$(par HR)
$= n+1+\dfrac{n+1}{n+1}$
$= n+2$.
Donc $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n+1$.

Exercice 13. 1. Soit $P(n) : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

   Initialisation : $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1\times(1+1)}{2}$, donc $P(1)$ est vraie.

   Hérédité : suposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, c'est à dire, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire, $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

En effet,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 (\text{d'après HR}) \\ &= (n+1)(\frac{n}{2} + 1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Soit $P(n) : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Initialisation : $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6}$, donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : supposons que $P(n)$ est vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$, c'est à dire, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire, $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

En effet,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 (\text{d'après HR}) \\ &= (n+1)(\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1 \\ &= (n+1)\frac{2n^2 + n + 6(n+1)}{6} \\ &= (n+1)(\frac{2n^2 + 7n + 6}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Soit $P(n) : \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Initialisation : $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = \left(\frac{1 \times (1+1)}{2}\right)^2$, donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, c'est à dire, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire, $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$

En effet,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 (\text{d'après HR}) \\
&= (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) \\
&= (n+1)^2 \times \left(\frac{n^2 + 4(n+1)}{4}\right) \\
&= (n+1)^2 \times \frac{n^2 + 4n + 4}{4} \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 .
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 14. 1. Soit $P(n) : n! > n^2$.

Initialisation

Pour $n = 4$, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 > 16 = 4^2$.

Donc $P(4)$ est vraie

Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \geqslant 4$, c'est à dire, $n! > n^2$.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie.

En effet, on a

$(n+1)! = (n+1)n! > (n+1)n^2$(par HR).

Comme $n \geqslant 4$, on a $n^2 = n \times n \geqslant 4n$. Or pour $n \geqslant 4$, $4n = n + 3n > n + 1$, d'où $n^2 \geqslant (n+1)$.

Donc $(n+1)n^2 \geqslant (n+1)^2$, et $(n+1)! > (n+1)^2$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout entier $n \geqslant 4$, $n! \geqslant n^2$.

2. Montrons par récurrence que : $\forall n \geqslant 6, n! > n^3$.

Soit $P(n) : n! > n^3$.

Initialisation

Pour $n = 6$, $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720 > 6^3 = 216$. Donc $P(6)$ est vraie

Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \geqslant 6$, c'est à dire, $n! > n^3$.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie.

En effet, $(n+1)! = (n+1)n! > (n+1)n^3$(par hypothèse de récurrence)

Comme $n \geqslant 6$, on a $n^3 = n \times n^2 \geqslant 6n^2$. Or pour tout $n \geqslant 6$ on a :

$$\begin{aligned}
6n^2 &= (n^2 + 2n^2 + n^2) + 2n^2 \\
&> (n^2 + 2n + 1) + 2n^2 (\text{car } n > 1) \\
&\geqslant (n+1)^2 (car n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \\
&\text{et } 2n^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

D'où $(n+1)n^2 \geqslant (n+1)^3$, soit $(n+1)! \geqslant (n+1)^3$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout entier $n \geqslant 6$, $n! \geqslant n^6$.

Exercice 15. Soit $P(n) : 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$.

Initialisation : $1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4} > \frac{3 \times 2}{2 \times 2 + 1} = \frac{6}{5}$, donc $P(2)$ est vraie.

Hérédité : supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, c'est à dire, $P(n) : 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$. Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire, $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{3(n+1)}{2n+3}$.

En effet,
$1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}>\frac{3n}{2n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}$ (par hypothèse de récurrence). Donc pour montrer $P(n+1)$, il suffit de montrer que $\frac{3n}{2n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}>\frac{3(n+1)}{2n+3}$, soit $\frac{3n}{2n+1}-\frac{3(n+1)}{2n+3}+\frac{1}{(n+1)^2}>0$.

On a $\frac{3n}{2n+1}-\frac{3(n+1)}{2n+3}+\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{3n}{2n+1}-\frac{3(n+1)}{2n+3}+\frac{1}{(n+1)^2}$
$=\frac{3n(n+1)^2(2n+3)-3(n+1)^3(2n+1)+(2n+1)(2n+3)}{(n+1)^2(2n+1)(2n+3)}$
$=\frac{3(n+1)^2(n(2n+3)-(n+1)(2n+1))+(2n+1)(2n+3)}{(n+1)^2(2n+1)(2n+3)}$
$=\frac{3(n+1)^2(2n^2+3n-(2n^2+n+2n+1))+(4n^2+6n+2n+3)}{(n+1)^2(2n+1)(2n+3)}$
$=\frac{-3(n+1)^2+(4n^2+8n+3)}{(n+1)^2(2n+1)(2n+3)}$
$=\frac{-3n^2-6n-3+4n^2+8n+3}{(n+1)^2(2n+1)(2n+3)}$
$=\frac{n^2+2n}{(n+1)^2(2n+1)(2n+3)}>0.$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}, 1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>\frac{3n}{2n+1}$

Exercice 16. Soit (u_n) la suite réelle déterminée par

$$u_0=2, u_1=3 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n$$

Montrons par récurrence double que

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n=2^n+1$$

Soit $P(n)$: $u_n=2^n+1$.

Initialisation : On a $u_0=2=2^0+1$ et $u_1=3=2^1+1$. Donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

Hérédité : Supposons que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies pour un certain $n\in\mathbb{N}$, c'est à dire, $u_n=2^n+1$ et $u_{n+1}=2^{n+1}+1$, montrons que $P(n+2)$ est vraie.

En effet, on a

$$\begin{aligned}u_{n+2}&=3u_{n+1}-2u_n\\&=3(2^{n+1}+1)-2(2^n+1) \text{ (par HR)}\\&=3\times 2^{n+1}+3-2\times 2^n-2\\&=3\times 2^{n+1}+3-2^{n+1}-2\\&=2\times 2^{n+1}+1\\&=2^{n+2}+1\end{aligned}$$

Donc $P(n+2)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=2^n+1$

Exercice 17.
1. $A=\sum_{k=0}^{4}(4k+2)$
2. $B=\sum_{k=1}^{6}(-1)^{k+1}k$
3. $C=\sum_{k=1}^{5}(-1)^{k+1}3k$

Exercice 18. 1. $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{k+1}$

2. $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+2}) = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) + \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_{k+2}) = a_1 - a_{n+1} + a_2 - a_{n+2}$ car les deux sommes sont télescopiques. Ainsi $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+2}) = a_1 + a_2 - a_{n+1} - a_{n+2}$.

   Autre façon : si on pose $b_k = a_k + a_{k+1}$ alors $b_k - b_{k+1} = a_k - a_{k+2}$. Il en découle que $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+2}) = \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$. Comme $b_1 - b_{n+1} = a_1 + a_2 - -a_{n+1} - a_{n+2}$ on a $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+2}) = a_1 + a_2 - a_{n+1} - a_{n+2}$.

3. $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+3}) = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) + \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_{k+2}) + \sum_{k=1}^{n}(a_{k+2} - a_{k+3}) = a_1 - a_{k+1} + a_2 - a_{n+2} + a_3 - a_{n+3}$

   Autre façon : si on pose $b_k = a_k + a_{k+1} + a_{k+2}$ alors $b_k - b_{k+1} = a_k - a_{k+3}$. Il en découle que $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+3}) = \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$. Comme $b_1 - b_{n+1} = a_1 + a_2 + a_3 - -a_{n+1} - a_{n+2} - a_{n+3}$ on a $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+3}) = a_1 + a_2 + a_3 - a_{n+1} - a_{n+2} - a_{n+3}$.

   Que vaut $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+4})$?

4. $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k+1} - a_{2k+3}) = \sum_{k=1}^{n}(a_{2k+1} - a_{2(k+1)+1} = a_3 - a_{2k+3}$ par télescopage.

5. $\sum_{k=1}^{n}(a_{5k+6} - a_{5k+1}) = \sum_{k=1}^{n}(a_{5(k+1)+1} - a_{5k+1}) = a_{5k+6} - a_5$ par télescopage.

Exercice 19. 1. $\sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n-2} a_{j+2}$

2. $\sum_{k=0}^{n} a_{k+3} = \sum_{j=3}^{n+3} a_j$

Exercice 20. $A = \sum_{k=1}^{n} 2k = 2\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$

$B = \sum_{k=0}^{n}(5k-1) = 5\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} 1$
$= 5 \times \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) = (n+1)(\frac{5n}{2} - 1)$
$= \frac{(n+1)(5n-2)}{2}$

$C = \sum_{k=2}^{n+2}(k-2)^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$D = -\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = -\sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n} k = -\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = -\frac{n(n+1)(2n+4)}{6}$

Exercice 21. $A = 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 2\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{j}$ (j=k-1)

$= 2 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 6\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

$B = -19 \sum_{k=0}^{n} 7^k = -19 \dfrac{1-7^{n+1}}{1-7} = \dfrac{19}{6}(1-7^{k+1})$

$C = 3 \times \sum_{k=2}^{n} 3^{2(k-1)}$

$= 3 \times \sum_{k=2}^{n} 9^{k-2} = 3 \times \sum_{j=0}^{n-2} 9^j$ (j=k-2)

$= 3 \times \dfrac{9^{n-1}-1}{9-1} = \dfrac{3}{8}\left(9^{n-1}-1\right)$

Exercice 22. 1. **Première façon**

On a :
$\dfrac{1}{(k+1)(k+3)} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{(k+3)-(k+1)}{(k+1)(k+3)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{(k+1} - \dfrac{1}{(k+3}\right)$

Donc $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{2}$.

Deuxième façon

On a :
$\dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k+3} = \dfrac{a(k+3)+b(k+1)}{(k+1)(k+3)} = \dfrac{(a+b)k+3a+b}{(k+1)(k+3)}$.

Par identification $\begin{cases} a+b & = & 0 \\ 3a+b & = & 1 \end{cases}$ Soit $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{2}$.

2. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(k+1)(k+3)} = \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+3}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k+3}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+2}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k+2} - \dfrac{1}{k+3}\right)\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{n+3}\right) = \dfrac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)}$

Exercice 23. 1. $\dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$

$= \dfrac{a(k+1)(k+2)+bk(k+2)+ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)}$

$= \dfrac{(a+b+c)k^2+(3a+2b+c)k+2a}{k(k+1)(k+2)}$.

Par identification $\begin{cases} 2a & = & -1 \\ a+b+c & = & 0 \\ 3a+2b+c & = & 2 \end{cases}$

Soit $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = 3$ et $c = -\dfrac{5}{2}$.

2. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{2k-1}{k(k+1)(k+2)}$

$= \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(-\dfrac{1}{k} + \dfrac{6}{k+1} - \dfrac{5}{k+2}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k}\right) + \left(\dfrac{5}{k+1} - \dfrac{5}{k+2}\right)\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1} - 1 + \dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{n+2}\right)$

$= \dfrac{3n^2+n}{4(n+1)(n+2)}$

$= \dfrac{n(3n+1)}{4(n+1)(n+2)}$

Exercice 24. 1. (a) $(k+1)^2 = k^2+2k+1 \Leftrightarrow (k+1)^2 - k^2 = 2k+1$.

(b) On d'après (a), $\sum_{k=1}^{n}((k+1)^2-k^2)=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$. Le membre de gauche est une somme télescopique. Par linéarité de la somme on obtient :

$$(n+1)^2-1=2S_n+n,$$

Soit

$$2S_n=(n+1)^2-(n+1)=n^2+n.$$

Donc

$$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$$

2. (a) $(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1 \Leftrightarrow (k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$.

(b) On a d'après (a), $\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3-k^3)=\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)$.

Le membre de gauche est une somme télescopique. Par linéarité de la somme on obtient :

$$(n+1)^3-1=3T_n+3S_n+n,$$

Soit

$$3T_n=(n+1)^3-(n+1)-3\frac{n(n+1)}{2}=(n+1)((n+1)^2-1-\frac{3n}{2}).$$

Donc

$$3T_n=(n+1)\frac{2n^2+n}{2}$$

soit

$$3T_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.$$

Donc

$$T_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. On calcule $\sum_{k=1}^{n}((k+1)^4-k^4)$ de deux manière, par télescopage et en développant.