

Exercice 1

Développer et réduire mentalement :

- $A = x(5x + 2) - 2x$
Réponse : $A = 5x^2$
- $B = (2x + 3)(3x + 2) - 13x - 6$
Réponse : $B = 6x^2$
- $C = (2x + 3)(2x - 3) + 9$
Réponse : $C = 4x^2$
- $D = (5x + 3)(2x + 1) - (7x + 4)(x + 1)$
Réponse : $D = 3x^2 - 1$
- $E = (5x + 3)^2 - 30x - 9$
Réponse : $D = 25x^2$

Exercice 2

Factoriser mentalement :

- $A = x(4x + 1) - x(3x + 5)$
Réponse : $A = x(x - 4)$
- $B = (2x - 5)(13x + 5) - (2x - 5)(3x + 2)$
Réponse : $B = (2x - 5)(10x + 3)$
- $C = (7x + 3)^2 - 9$
Réponse : $7x(7x + 6)$
- $D = x^2 + 16x + 64$
Réponse : $D = (x + 8)^2$
- $E = x^2 - 18x + 81$
Réponse : $E = (x - 9)^2$

Exercice 3

Développer et réduire mentalement :

- $A = (x + y)^2 + (x - y)^2$
Réponse : $A = 2x^2 + 2y^2$
- $B = (x + y)^2 - (x - y)^2$
Réponse : $B = 4xy$
- $C = (x + y)^2 + (2x + 2y)^2$
Réponse : $5x^2 + 10xy + 5y^2$
- $D = (2x + 2y)^2 - (x + y)^2$
Réponse : $3x^2 + 6xy + 3y^2$
- $E = (x + y)(3x - 3y)$
Réponse : $E = 3x^2 - 3y^2$

Exercice 4

Développer et réduire les expressions suivantes :

- $A = (2x + 3)^2 - (7x - 3)^2$
 $= 4x^2 + 12x + 9 - (49x^2 - 42x + 9)$
 $= 4x^2 + 12x + 9 - 49x^2 + 42x - 9$
 $= -45x^2 + 54x$
- $B = -(-2x + 3)(2x + 3) + 2(2x - 3)(4x - 12)$
 $= (2x - 3)(2x + 3) + 8(2x - 3)(x - 3)$
 $= (2x - 3)(2x + 3) + 8(2x - 3)(x - 3)$
 $= 4x^2 - 9 + 8(2x^2 - 9x + 9)$
 $= 4x^2 - 9 + 16x^2 - 72x + 72$
 $= 20x^2 - 72x + 63$

- $C = (x + 3y)^2 + (3x - y)^2$
 $= x^2 + 6xy + 9y^2 + 9x^2 - 6xy + y^2$
 $= 10x^2 + 10y^2$
- $D = (x + 3y)^2 - (3x - y)^2$
 $= x^2 + 6xy + 9y^2 - 9x^2 + 6xy - y^2$
 $= -8x^2 + 12xy + 8y^2$

Exercice 5

Factoriser les expressions suivantes :

- $A = 2x^2 - 50$
 $= 2(x^2 - 25)$
 $= 2(x^2 - 5^2)$
 $= 2(x + 5)(x - 5)$
- $B = (5x + 3)^2 - (3x - 4)^2 = (5x + 3 + 3x - 4)(5x + 3 - (3x - 4))$
 $= (8x - 1)(2x + 7)$
- $C = 4x^2 - 49(x - 6)^2 = (2x)^2 - (7(x - 6))^2$
 $= (2x)^2 - (7(x - 6))^2$
 $= (2x + 7(x - 6))(2x - 7(x - 6))$
 $= (9x - 42)(-5x + 42)$
- $D = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$
- $E = 2x^2 + 8x + 8 = 2(x^2 + 4x + 4) = 2(x + 2)^2$

Exercice 6

Calculer et mettre sous forme irréductible les expressions suivantes :

- $A = \frac{5}{5} - \frac{7}{18} + \frac{3}{5}$
 $= \frac{2 \times 3}{5 \times 3} - \frac{2 \times 3 \times 3}{2 \times 3 \times 3} + \frac{3}{5}$
 $= \frac{75 - 35 + 54}{90} = \frac{94}{90} = \frac{47}{45}$
- $B = \left(5 - \frac{3}{8}\right) \left(\frac{4}{9} - \frac{2}{7}\right) = \frac{37}{8} \times \frac{10}{63}$
 $= \frac{37}{4} \times \frac{5}{63} = \frac{37}{4} \times \frac{5}{63} = \frac{185}{252}$
- $C = \frac{\frac{5}{3} - \frac{7}{2}}{2 - \frac{5}{6}} = \frac{-\frac{11}{6}}{\frac{7}{6}} = -\frac{11}{7}$
- $D = \frac{3 - 5\left(\frac{10}{3} - 4\right)}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{3 + \frac{10}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{19}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{76}{3}$
- $E = \frac{-2 + \frac{11}{8}}{\frac{5}{9} - 1} = \frac{-\frac{5}{8}}{\frac{5}{21} - 1} = \frac{-\frac{5}{8}}{\frac{20}{21} - 1}$
 $= \frac{-\frac{5}{8}}{-\frac{1}{21}} = \frac{105}{8}$

Exercice 7

Simplifier :

1. $A = 7 \times 2^{16} - 3 \times 2^{17} = 2^{16}(7 - 3 \times 2) = 2^{16}.$

2. $B = \frac{2^{-15} \times (-3)^7 \times 15^{-30} \times 14^3}{6^{17} \times 15^{-30} \times 21^3}$

$$= -\frac{2^{-15} \times 3^7 \times 15^{-30} \times 2^3 \times 7^3}{2^{17} \times 3^{17} \times 15^{-30} \times 3^3 \times 7^3}$$

$$= -2^{-15+3-17} \times 3^{7-17-3} = -2^{-29} \times 3^{-13}$$

3. $C = 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2016} = \frac{2^{2017} - 1}{2 - 1} = 2^{2017} - 1$

4. $D = 1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-2016}$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2016}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2017}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - 2^{-2016}$$

5. $E = 1 - 2^{-1} + 2^{-2} - \dots + 2^{-2016}$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{2016}$$

$$= \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{2017}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3} (2 + 2^{-2016})$$

Exercice 8

Simplifier :

1. $A = \sqrt{50} - 5\sqrt{18} = 5\sqrt{2} - 15\sqrt{2} = -10\sqrt{2}.$

2. $B = \left(\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2}\right)^2$

$$= 2 + \cancel{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} + 2 - \cancel{\sqrt{2}}$$

$$= 4 + 2\sqrt{4-2} = 4 + 2\sqrt{2}.$$

3. $C = \sqrt{10 - 2\sqrt{21}} = \sqrt{(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2} = \sqrt{7} - \sqrt{3}$

4. $D = \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

5. $E = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} +$

$$\frac{1}{\sqrt{6}+2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} +$$

$$\frac{\sqrt{6}-2}{2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$$

Exercice 9

Ecrire sous forme canonique :

1. $f(x) = 2x^2 + x + 1 = 2(x - \alpha)^2 + \beta$ où $\alpha = -\frac{1}{4}$

et $\beta = f(\alpha) = f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{8}.$

Donc $f(x) = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}.$

2. $g(x) = 3x^2 + 4x - 5.$

$g(x) = 3x^2 + 4x - 5 = 3(x - \alpha)^2 + \beta$ où $\alpha = -\frac{2}{3}$

et $\beta = g(\alpha) = g\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{19}{3}.$

Donc $g(x) = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{19}{3}.$

Exercice 10

Résoudre les inéquations en utilisant un tableau de signes : 1.

$(2x + 6)^2 \geq (7x + 9)^2 \Leftrightarrow (7x + 9)^2 - (2x + 6)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (9x + 15)(5x + 3)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow 3(3x + 5)(5x + 3)^2 \leq 0$

Grâce au tableau de signes on obtient

$S = \left[-\frac{5}{3}; -\frac{3}{5}\right].$

2.

$(5 - 4x)(3x - 4) \leq (-6x + 8)(2x - 3)$

$\Leftrightarrow (5 - 4x)(3x - 4) \leq -2(3x - 4)(2x - 3)$

$\Leftrightarrow (5 - 4x)(3x - 4) + 2(3x - 4)(2x - 3) \leq 0$

$\Leftrightarrow (3x - 4)(5 - 4x) + (3x - 4)(4x - 6) \leq 0$

$\Leftrightarrow -(3x - 4) \leq 0$

$\Leftrightarrow 3x - 4 \geq 0$

Grâce au tableau de signes on obtient

$S = \left[\frac{4}{3}; +\infty[.$

3.

$(3 - 5x)(2x + 1) > 4x^2 - 1$

$\Leftrightarrow (3 - 5x)(2x + 1) > (2x - 1)(2x + 1)$

$\Leftrightarrow (3 - 5x)(2x + 1) - (2x - 1)(2x + 1) > 0$

$\Leftrightarrow (-7x + 4)(2x + 1) > 0$

Grâce au tableau de signes on obtient

$S = \left]-\frac{1}{2}; \frac{4}{7}[.$

Exercice 11

Résoudre les inéquations en utilisant un tableau de signes :

1. $\frac{6x - 5}{3x^2 - x - 2} \geq 0.$ Les valeurs interdites sont les solutions éventuelles de $3x^2 - x - 2 = 0.$

Ici $\Delta = 25$ et les solutions sont

$x_1 = \frac{1-5}{6} = -\frac{2}{3}$ et $x_2 = \frac{1+5}{6} = 1.$ Le numé-

rateur s'annule en $x = \frac{5}{6}.$ En utilisant le tableaude signes de $\frac{6x - 5}{3x^2 - x - 2}$ on obtient :

$S = \left]-\frac{2}{3}; \frac{5}{6}\right] \cup [1; +\infty[.$

2. Pour $x \neq \frac{2}{3}$ et $x \neq \frac{4}{3}$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{2x+7}{3x-2} &\leq \frac{5x+4}{-3x+4} \Leftrightarrow \frac{5x+4}{-3x+4} - \frac{2x+7}{3x-2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{21x^2+15x-36}{(3x-2)(-3x+4)} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{7x^2+5x-12}{(3x-2)(-3x+4)} \geq 0. \end{aligned}$$

Le numérateur s'annule en $x = 1$ et en $x = -\frac{12}{7}$ (ici $\Delta = 361 = 19^2$). En étudiant le tableau de signes de $\frac{7x^2+5x-12}{(3x-2)(-3x+4)}$ on obtient :

$$S = \left[-\frac{12}{7}; \frac{2}{3}\right[\cup \left[\frac{4}{3}; +\infty\right[$$

Exercice 12

Résoudre les équations :

1. $|3x+2| \geq 5 \Leftrightarrow |3x+2|^2 \geq 25 \Leftrightarrow (3x+2)^2 - 25 \geq 0$
 $\Leftrightarrow 3(3x+7)(x-1) \geq 0.$

Donc $S =]-\infty; -\frac{7}{3}] \cup [1; +\infty[.$

2. $|7x-3| \leq |1-9x| \Leftrightarrow (7x-3)^2 \leq (1-9x)^2$
 $\Leftrightarrow (9x-1)^2 - (7x-3)^2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow (16x-4)(2x+2) \geq 0 \Leftrightarrow (4x-1)(x+1) \geq 0.$

Donc $S =]-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[.$

Exercice 13

1. Résoudre mentalement :

(a) Pour $2x = -x + 1$, $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

(b) Pour $x^2 = 2x$, $S = \{0; 2\}.$

(c) Pour $(x+1)^2 = 4x^2$, $S = \left\{-\frac{1}{3}; 1\right\}.$

2. Résoudre les inéquations suivantes :

(a) Pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a :

$$x + \sqrt{x} \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 2 - x \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 2 - x.$$

Comme $\sqrt{x} \geq 0$, on a nécessairement $x \in [0; 2].$

Comme la fonction carrée est croissante sur $[0; +\infty[$ on a pour tout $x \in [0; 2]$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} \leq 2 - x &\Leftrightarrow x \leq (2 - x)^2 \\ &\Leftrightarrow x \leq x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \geq 0. \end{aligned}$$

Grâce au tableau de signes de $x^2 - 5x + 4$, on a $S = [0; 1].$

(b) Pour tout $x \in [-3; +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+1} &\leq \sqrt{x+3} \\ &\Leftrightarrow x^2+1 \leq x+3 \end{aligned}$$

car la fonction carrée est croissante sur $[0; +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \sqrt{x^2+1} &\leq \sqrt{x+3} \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0 \end{aligned}$$

En utilisant le tableau de signes de $x^2 - x - 2$ on obtient $S = [-1; 2]$

(c) Comme la fonction carrée est croissante sur $[0; +\infty[$ on a pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$:

$$\begin{aligned} |x+1| &\leq \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow |x+1|^2 \leq \sqrt{2x+1}^2 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 \leq 2x+1 \Leftrightarrow x^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Donc $S = \{0\}.$

Exercice 14

1. Résoudre les équations suivantes :

(a) Pour tout $x \in [0; +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} &= \sqrt{x} + \sqrt{2} \Leftrightarrow x+2 = (\sqrt{x} + \sqrt{2})^2 \\ &\Leftrightarrow x+2 = x+2\sqrt{2x}+2 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Donc $S = \{0\}$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} 3x+2 + \sqrt{2x^2+1} &= \sqrt{8x^2+4} \\ &\Leftrightarrow 3x+2 + \sqrt{2x^2+1} = 2\sqrt{2x^2+1} \\ &\Leftrightarrow 3x+2 = \sqrt{2x^2+1}. \end{aligned}$$

On a nécessairement $x \in \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right[.$

Pour tout $x \in \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right[$ on a

$$\begin{aligned} 3x+2 &= \sqrt{2x^2+1} \Leftrightarrow (3x+2)^2 = 2x^2+1 \\ &\Leftrightarrow 9x^2+12x+4 = 2x^2+1 \\ &\Leftrightarrow 7x^2+12x+3 = 0. \end{aligned}$$

$$\Delta = 60; x_1 = \frac{-6 - \sqrt{15}}{7} \notin \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right[$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-6 + \sqrt{15}}{7} \in \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right[.$$

$$\text{Donc } S = \left\{\frac{-6 + \sqrt{15}}{7}\right\}.$$

(c) $x + |x+1| = |x| \Leftrightarrow f(x) = 0$. où $f(x) = x + |x+1| - |x|.$

A l'aide d'un tableau on a :

Pour tout $x \in]-\infty; -1]$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ impossible car } 1 \notin]-\infty; -1].$$

Pour tout $x \in]-1; 0]$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

Pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ impossible car } -1 \notin]0; +\infty[. \text{ Donc } S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}.$$

$$\begin{aligned} \text{(d) } \sqrt{x + \sqrt{x+1}} &= 1 \\ &\Leftrightarrow (x \geq -1 \text{ et } x + \sqrt{x+1} = 1). \end{aligned}$$

Sur $[-1; +\infty[$ on a :

$$x + \sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 1 - x.$$

Comme $\sqrt{x+1} \geq 0$, on a nécessairement $1 - x \geq 0$, soit $x \in [-1; 1].$

Sur $[-1; 1]$ on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} &= 1 - x \Leftrightarrow x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow \\ &x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3. \end{aligned}$$

Or $3 \notin [-1; 1]$, donc $S = \{0\}.$

2. Résoudre les inéquations suivantes :

- (a) Sur $[0; +\infty[$ on a :
- $$x + 1 + \sqrt{x} \leq \sqrt{x+1}$$
- $$\Leftrightarrow x + 1 \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$
- $$\Leftrightarrow (x+1)^2 \leq (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^2$$
- $$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \leq 2x + 1 - 2\sqrt{x(x+1)}$$
- (car la fonction carrée est croissante sur \mathbb{R}_+)
- $$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \leq 2x + 1 - 2\sqrt{x(x+1)}$$
- $$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq -2\sqrt{x(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$$
- (b) Montrons tout d'abord que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{x^2 + 1} \geq 0$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{x^2 + 1} \geq x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0$.
On a donc
- $$x + \sqrt{x^2 + 1} \geq \sqrt{2x^2 + 1}$$
- $$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x^2 + 1})^2 \geq 2x^2 + 1$$
- $$\Leftrightarrow 2x^2 + 1 + 2x\sqrt{x^2 + 1} \geq 2x^2 + 1$$
- $$\Leftrightarrow 2x\sqrt{x^2 + 1} \geq 0$$
- $$\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ car } 2\sqrt{x^2 + 1} > 0.$$
- Donc $S = [0; +\infty[$.
- (c) $|x| + |x + 1| \leq |x + 2| \Leftrightarrow f(x) \geq 0$
où $f(x) = |x + 2| - |x| - |x + 1|$.
En utilisant un tableau on obtient :
- Sur $]-\infty; -2[$ on a
 $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0$
 $\Leftrightarrow x \geq 1$ impossible.
- Sur $[-2; -1[$ on a
 $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3x + 3 \geq 0$
 $\Leftrightarrow x \geq -1$ impossible.
- Sur $[-1; 0[$ on a
 $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 0[$.
- Sur $[0; +\infty[$ on a
 $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [0; 1]$.
- Finalement, $S = [-1; 1]$.

Exercice 15

Soient a, b, c trois nombres réels.

Le but de cet exercice est de montrer que

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$$

et qu'en cas d'égalité on a $a = b = c$.

1. Si $a = b = c = 0$ alors $ab + bc + ca = a^2 + b^2 + c^2 = 0$.

2. On suppose que a, b et c ne sont pas tous nuls.

On pose $P(x) = (ax + b)^2 + (bx + c)^2 + (cx + a)^2$,
 $A = a^2 + b^2 + c^2$ et $B = ab + bc + ca$.

(a) $P(x) = Ax^2 + 2Bx + A$.

(b) Comme a, b et c ne sont pas tous nuls on a $A \neq 0$. Donc $P(x)$ est un trinôme.

$P(x)$ est la somme de trois carrés, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$, donc son discriminant $\Delta = 4B^2 - 4A^2 \leq 0$. Donc $B^2 \leq A^2$, soit $|B| \leq |A|$. Or $A \geq 0$ et $B \leq |B|$, d'où $B \leq A$.

(c) Si $A = B$ alors $\Delta = 4B^2 - 4A^2 = 0$. Dans ce cas l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution, à savoir $x_0 = -\frac{B}{A} = -1$.

(d) Si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ alors, d'après 2.(c) $P(-1) = 0$. Or $P(-1) = (-a + b)^2 + (-b + c)^2 + (-c + a)^2$, d'où $a = b = c$.

3. Si a_1, \dots, a_n sont des nombres réels on a
 $a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n + a_na_1 \leq a_1^2 + \dots + a_n^2$.
Si $a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = a_1^2 + \dots + a_n^2$
alors $a_1 = \dots = a_n$.

Pour démontrer ces résultats on reprend les mêmes étapes que dans 1) et 2) en posant $P(x) = (a_1x + a_2)^2 + (a_2x + a_3)^2 + \dots + (a_{n-1}x + a_n)^2 + (a_nx + a_1)^2$, $A = a_1^2 + \dots + a_n^2$ et $C = a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n + a_na_1$.