Exercice 1. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.*
Exprimer verbalement la signification des assertions suivantes :
a) $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = C$
b) $\forall x \in I, f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
c) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$
d) $\forall x, y \in I, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$
e) $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Exercice 2. *Décrire les parties de $\mathbb{R}$ dans lesquelles évoluent x pour que les assertions suivantes soient vraies :*
a) $(x > 0$ *et* $x < 1)$ *ou* $x = 0$
b) $x > 3$ *et* $x < 5$ *et* $x \neq 4$
c) $(x \leqslant 0$ *et* $x > 1)$ *ou* $x = 4$
d) $x \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 2$.

Exercice 3. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.*
Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :
a) la fonction f s'annule.
b) la fonction f est la fonction nulle.
c) f n'est pas une fonction constante.
d) f ne prend jamais deux fois la même valeur.
e) la fonction f présente un minimum.
f) f prend des valeurs arbitrairement grandes.
g) f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Exercice 4. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I.*
Exprimer les négations des assertions suivantes :
a) $\forall x \in I, f(x) \neq 0$
b) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$
c) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f(x)| \leqslant M$
d) $\forall x, y \in I, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$
e) $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
f) $\forall x \in I, f(x) > 0 \Rightarrow x \leqslant 0$.

Exercice 5. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*
On considère les assertions suivantes :

P : « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ » , Q : « $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ »

et

R : « $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0)$ *ou* $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0)$ »

Parmi les implications suivantes lesquelles sont exactes :

a) $P \Rightarrow Q$ *b)* $Q \Rightarrow P$ *c)* $Q \Rightarrow R$
d) non$(R) \Rightarrow Q$ *e)* non$(Q) \Rightarrow$ non(P) ?

Exercice 6. *Sachant $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, montrer*

$$\forall x \in \mathbb{Q}, x + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Exercice 7. *Montrer*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbb{N}$$

Exercice 8. *Soit $m \in \mathbb{R}$. Discuter selon m le nombre de solutions de l'équation*

$$mx^2 - 2(m+1)x + m - 1 = 0.$$

Exercice 9. *Soit $a \in \mathbb{R}$.*
a) Montrer que $(\forall \varepsilon \geqslant 0, |a| \leqslant \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.
b) Montrer que $(\forall \varepsilon > 0, |a| \leqslant \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.

Exercice 10. *Soit a est un nombre réel strictement positif.*

1. *Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na$$

.

2. *Ce résultat subsiste-il si $-1 < a < 0$? Justifier votre réponse.*

Exercice 11.

1. *Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.
2. *Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Exercice 12. *Soit (u_n) une suite réelle telle que*

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) u_n$$

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = n + 1.$$

Exercice 13. *Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a :*

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Exercice 14. ***

Montrer par récurrence que :

1. *pour tout entier $n \geqslant 4$, $n! \geqslant n^2$.*
2. *pour tout entier $n \geqslant 6$, $n! \geqslant n^3$.*

Exercice 15. ***

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$$

Exercice 16. *Soit (u_n) la suite réelle déterminée par*

$$u_0 = 2, u_1 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 1$$

Exercice 17. *Écrire les sommes suivantes avec le symbole* $\sum$ *:*

1. $A = 2 + 6 + 10 + 14 + 18$.
2. $B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6$.
3. $C = 3 - 6 + 9 - 12 + 15$.

Exercice 18. *Simplifier les expressions suivante :*

1. $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1})$
2. $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+2})$
3. $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+3})$
4. $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k+1} - a_{2k+3})$
5. $\sum_{k=1}^{n}(a_{5k+6} - a_{5k+1})$

Exercice 19. *Compléter :*

1. $\sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{\dots} a_{\dots}$
2. $\sum_{k=0}^{n} a_{k+3} = \sum_{j=\cdots}^{\cdots} a_j$

Exercice 20. *Calculer les sommes suivantes en fonction de* n *:*

$A = \sum_{k=1}^{n} 2k \quad B = \sum_{k=0}^{n}(5k-1) \quad C = \sum_{k=2}^{n+2}(k-2)^2$

$D = \sum_{k=2}^{n}(k-2)(1-k)$

Exercice 21. *Calculer les sommes suivantes en fonction de* n *:*

$A = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{3^{k-1}} \quad B = \sum_{k=0}^{n}(2 \times 7^k - 3 \times 7^{k+1})$

$C = \sum_{k=2}^{n} 3^{2k-1}$

Exercice 22. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}$$

1. *Déterminer les réels* a *et* b *tels que* $\frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+3}$.
2. *En déduire l'expression de* S_n *en fonction de* n.

Exercice 23. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{k(k+1)(k+2)}$$

1. *Déterminer les réels* a, b *et* c *tels que* $\frac{2k-1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$.
2. *En déduire l'expression de* S_n *en fonction de* n.

Exercice 24. *Les but de cet exercice est de calculer* $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$ *et* $T_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ *sans utiliser la récurrence :*

1. (a) *vérifier que* $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$.
   (b) *En déduire le calcul de* S_n.
2. (a) *vérifier que* $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$.
   (b) *En déduire le calcul de* T_n.
3. *Comment procéderiez pour caluler* $\sum_{k=1}^{n} k^3$ *?*

Exercice 25. *Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies :*
a) $\prod_{k=1}^{n} \alpha a_k = \alpha \prod_{k=1}^{n} a_k$ *b)* $\prod_{k=1}^{n} a_k b_k = \prod_{k=1}^{n} a_k \prod_{k=1}^{n} b_k$ *c)* $\prod_{k=1}^{n} a_k + b_k = \prod_{k=1}^{n} a_k + \prod_{k=1}^{n} b_k$ *?*

Exercice 26. *Calculer* P *lorsque :*

1. $P = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.
2. $P = \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.
3. $P = \prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}$.

Exercice 27. *Soient* $a \in \mathbb{R}$ *et*

$$P = \prod_{k=0}^{n} (1 + a^{2^k})$$

a) Calculer P *quand* $a = 1$.
b) Calculer $(1-a)P$ *quand* $a \neq 1$ *et en déduire la valeur de* P.

Exercice 28. *Exprimer* $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$ *puis* $1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)$ *à l'aide de factoriels*

Exercice 29. *Montrer de deux manières que pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$

$$\prod_{k=1}^{n} (4k-2) = \prod_{k=1}^{n} (n+k)$$

Exercice 30. *Écrire sans le signe somme :*

a) $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant 3} a_{ij}$ *b)* $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} a_{ij}$

c) $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=i+1}^{4} a_{ij}$ *d)* $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=i+1}^{4} i^2 a_{ij}$

Exercice 31. *Écrire avec le signe somme double :*

1. $(a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3})+(a_{2,2}+a_{2,3})+a_{3,3}$
2. $(a_{1,1}+2a_{1,2}+3a_{1,3})+2(a_{2,2}+3a_{2,3})+3a_{3,3}$
3. $a_{1,1}+a_{2,2}+a_{3,3}$

Exercice 32. *Calculer :*

a) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 2015$ *b)* $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$

c) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^2$ *b)* $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (n-i)^2$

c) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j^3(n-i)^2$

Exercice 33. *****

A partir des valeurs connues de $\sum\limits_{k=1}^{n} k$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ *et* $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$, *calculer :*

a) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)^2$ *b)* $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij$ *c)* $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j)$

Exercice 34. *****

Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. *Calculer* $C_n=\sum\limits_{1\leqslant p<q\leqslant n}(p+q)$ *en remarquant*

$$\sum_{1\leqslant p,q\leqslant n} p+q = 2C_n + 2\sum_{p=1}^{n} p$$

Exercice 35. *Développer les expression suivantes :* $A=(1+3x)^4$, $B=(2-3x)^4$, $C=(1+x)^6+(1-x)^6$.

Exercice 36. *Calculer les sommes suivantes où* $n\in\mathbb{N}^*$ *:*

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-2)^{n-k}\binom{n}{k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-3)^{k}\binom{2n}{k}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-3)^{n-k}\binom{2n}{k}$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k2^k\binom{n}{k}$
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$
8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n-1}{k}$
9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}$
10. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}$
11. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(n-k)\binom{n}{k}$

Exercice 37.

1. *Calculer de deux manières différentes* $(1-1)^{101}$.
2. *En déduire la formule :*

$$\sum_{k=0}^{50}\binom{100}{2k+1}=\sum_{k=0}^{50}\binom{100}{2k}$$

Exercice 38. *Soit* $x\in\mathbb{R}$, m *et* n *deux entiers naturels.*

1. *A l'aide de la formule du binôme de Newton, développer* $(1+x)^{m+n}$ *et* $(1+x)^m\times(1+x)^n$.
2. *En déduire la formule de Vandermonde :*

$$\forall (m,\ n)\in\mathbb{N}^2,\ \forall p\in [\![0\,;m+n]\!],\ \binom{m+n}{p}=\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$$