Exercice 1. Écrire sans le signe somme :

$$\text{a) } \sum_{1\leqslant i,j\leqslant 3} a_{ij} \qquad \text{b) } \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} a_{ij}$$
$$\text{c) } \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4} a_{ij} \qquad \text{d) } \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4} i^2 a_{ij}$$

Exercice 2. Écrire avec le signe somme double :

1. $(a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3})+(a_{2,2}+a_{2,3})+a_{3,3}$
2. $(a_{1,1}+2a_{1,2}+3a_{1,3})+2(a_{2,2}+3a_{2,3})+3a_{3,3}$
3. $a_{1,1}+a_{2,2}+a_{3,3}$

Exercice 3. Calculer :

$$\text{a) } \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 2015 \qquad \text{b) } \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$$
$$\text{c) } \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^2 \qquad \text{d) } \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (n-i)^2$$
$$\text{e) } \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j^3(n-i)^2$$

Exercice 4 (***). A partir des valeurs connues de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3$, calculer :

$$\text{a) } \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)^2 \quad \text{b) } \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij \quad \text{c) } \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j)$$

Exercice 5 (***). Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer $C_n = \sum_{1\leqslant p<q\leqslant n}(p+q)$ en remarquant

$$\sum_{1\leqslant p,q\leqslant n} p+q = 2C_n + 2\sum_{p=1}^{n} p$$

Exercice 6. Développer les expression suivantes : $A=(1+3x)^4$, $\quad B=(2-3x)^4$, $\quad C=(1+x)^6+(1-x)^6$.

Exercice 7. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies :
a) $\prod_{k=1}^{n} \alpha a_k = \alpha \prod_{k=1}^{n} a_k$ b) $\prod_{k=1}^{n} a_k b_k = \prod_{k=1}^{n} a_k \prod_{k=1}^{n} b_k$ c) $\prod_{k=1}^{n} a_k + b_k = \prod_{k=1}^{n} a_k + \prod_{k=1}^{n} b_k$?

Exercice 8. Calculer P lorsque :

1. $P = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$.
2. $P = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)$.
3. $P = \prod_{k=1}^{n}\dfrac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}$.

Exercice 9. Soient $a\in\mathbb{R}$ et

$$P = \prod_{k=0}^{n}\left(1+a^{2^k}\right)$$

a) Calculer P quand $a=1$.
b) Calculer $(1-a)P$ quand $a\neq 1$ et en déduire la valeur de P.

Exercice 10. Exprimer $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$ puis $1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)$ à l'aide de factoriels

Exercice 11. Montrer de deux manières que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$

$$\prod_{k=1}^{n} (4k-2) = \prod_{k=1}^{n} (n+k)$$

Exercice 12. Calculer les sommes suivantes
où $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-2)^{n-k} \binom{n}{k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-3)^{k} \binom{2n}{k}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-3)^{n-k} \binom{2n}{k}$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k 2^{k} \binom{n}{k}$
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$
8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n-1}{k}$
9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k}$
10. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$
11. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(n-k) \binom{n}{k}$

Exercice 13.
1. Calculer de deux manières différentes $(1-1)^{101}$.
2. En déduire la formule :

$$\sum_{k=0}^{50} \binom{101}{2k+1} = \sum_{k=0}^{50} \binom{101}{2k}$$

Exercice 14. Soit $x \in \mathbb{R}$, m et n deux entiers naturels.

1. A l'aide de la formule du binôme de Newton, développer $(1+x)^{m+n}$ et $(1+x)^m \times (1+x)^n$.
2. En déduire la formule de Vandermonde :

$$\forall (m,\ n) \in \mathbb{N}^2,\ \forall p \in [\![0\,; m+n]\!],\ \binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$$