Exercice 1. a) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 3} a_{ij} = a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{31}+a_{32}+a_{33}$

b) $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} a_{ij} = a_{12}+a_{13}+a_{23}$

c) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4} a_{ij} = a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{23}+a_{24}+a_{34}$;

Exercice 2. 1. $(a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3})+(a_{2,2}+a_{2,3})+a_{3,3} = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3} a_{ij}$

2. $(a_{1,1}+2a_{1,2}+3a_{1,3})+(2a_{2,2}+3a_{2,3})+3a_{3,3} = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3} ja_{ij}$

3. $a_{1,1}+a_{2,2}+a_{3,3} = \sum_{1\leqslant i\leqslant 3} a_{ii}$

Exercice 3. a) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 2015 = 2015n^2$

b) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

c) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 1\right) = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}$

d) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (n-i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} (n-i)^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 1\right) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 1\right) = \frac{n^2(n-1)(2n-1)}{6}$

e) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j^3(n-i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} (n-i)^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j^3\right) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j^3\right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 4. a) $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} ij = \sum_{j=2}^{n} j\left(\sum_{i=1}^{j-1} i\right) = \sum_{j=2}^{n} j\frac{(j-1)j}{2} = \sum_{j=1}^{n} j\frac{(j-1)j}{2}$

$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j^3-j^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{n(n+1)}{4}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(2n+1)}{3}\right)$

$= \frac{n(n+1)}{4} \times \frac{3n^2-n-2}{6} = \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}$

b) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \min(i,j) + \sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} \min(i,j)$

$= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i + \sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} j = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j$

$= \sum_{j=2}^{n} \frac{(j-1)j}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2}$

$= \sum_{j=1}^{n} \frac{(j-1)j}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2}$

$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(i-1)i}{2} + \frac{i(i+1)}{2}\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} i^2$

$= \frac{n^2(n-1)(n+1)(2n-1)}{24}$

Exercice 5. En remarquant que $\sum\limits_{1\leqslant p<q\leqslant n} p+q = \sum\limits_{1\leqslant q<p\leqslant n} p+q$ par symétrie des indices, on a

$$\sum_{1\leqslant p,q\leqslant n} p+q = \sum_{1\leqslant p<q\leqslant n} p+q + \sum_{1\leqslant q<p\leqslant n} p+q + \sum_{1\leqslant p=q\leqslant n} p+q = 2C_n + 2\sum_{p=1}^{n} p$$

D'autre part $\sum\limits_{1\leqslant p,q\leqslant n} p+q = \sum\limits_{1\leqslant p,q\leqslant n} p + \sum\limits_{1\leqslant p,q\leqslant n} q = n\dfrac{n(n+1)}{2} + n\dfrac{n(n+1)}{2} = n^2(n+1)$

D'où $C_n = \dfrac{n^2(n+1)-n(n+1)}{2}$.

Donc $C_n = \dfrac{n^2(n+1)-n(n+1)}{2} = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{2}$

Exercice 6. 1. $\prod\limits_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k}) = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k+1}{k}\right) = n+1$ (produit télescopique).

2. $\prod\limits_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2}) = \prod\limits_{k=2}^{n}\left(\dfrac{k^2-1}{k^2}\right) = \prod\limits_{k=2}^{n}\left(\dfrac{k+1}{k}\times\dfrac{k-1}{k}\right) = \prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k+1}{k}\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k-1}{k} = \dfrac{n+1}{2}\dfrac{1}{n} = \dfrac{n+1}{2n}$

3. $\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)} = \prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k+1}{k}\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k+2}{k+3} = \dfrac{n+1}{1}\times\dfrac{3}{n+3} = \dfrac{3(n+1)}{n+3}$.

Exercice 7. a) Pour $a=1$ on a $P=2^{n+1}$.

b) Pour $a\neq 1$, on remarque que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $(1-a^{2^k})(1+a^{2^k}) = (1-a^{2^{k+1}})$.

On a alors $(1-a)(1+a) = (1-a^2)$; $(1-a)(1+a)(1+a^2) = (1-a^2)(1+a^2) = (1-a^{2^2})$; $(1-a)(1+a)(1+a^2)(1+a^{2^2}) = (1-a^{2^3}, \cdots; (1-a)(1+a)\cdots(1+a^{2^{n-1}})(1+a^{2^n}) = (1-a^{2^{n-1}})(1+a^{2^n}) = 1-a^{2^{n+1}}$.

Soit $(1-a)P = 1-a^{2^{n+1}}$. On en déduit que pour $a\neq 1$, $P = \dfrac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}$.

Exercice 8. $2\times 4\times\cdots\times(2n) = \prod\limits_{k=1}^{n}(2k) = 2^n\prod\limits_{k=1}^{n}k = 2^n n!$

$$1\times 3\times\cdots\times(2n+1) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)\prod\limits_{k=1}^{n}(2k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

Exercice 9. On va montrer de deux façons que pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $\prod\limits_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod\limits_{k=1}^{n}(n+k)$.

1 ère façon

Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, on a d'une part

$$\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}2(2k-1) = 2^n\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{2^n\prod\limits_{k=1}^{n}(2k-1)\prod\limits_{k=1}^{n}2k}{\prod\limits_{k=1}^{n}2k} = \frac{2^n(2n)!}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{n!}.$$

D'autre part

$$\prod_{k=1}^{n}(n+k) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}k\prod\limits_{k=1}^{n}(n+k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}k} = \frac{(2n)!}{n!}.$$

Donc $\prod\limits_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod\limits_{k=1}^{n}(n+k)$.

2ème façon Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(n+k)$.

La propriété est vrai pour $n=1$, car $\prod_{k=1}^{1}(4k-2) = 2 = \prod_{k=1}^{1}(n+k)$.

Supposons que $\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(n+k)$ pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, montrons que $\prod_{k=1}^{n+1}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n+1}(n+1+k)$.

En effet, on a :

$$\prod_{k=1}^{n+1}(n+1+k) = \prod_{k=2}^{n+2}(n+k)(\text{ changement d'indice})$$

$$= (2n+1)(2n+2)\prod_{k=2}^{n}(n+k)$$

$$= 2(2n+1)(n+1)\prod_{k=2}^{n}(n+k)$$

$$= 2(2n+1)\prod_{k=1}^{n}(n+k)$$

$$= 2(2n+1)\prod_{k=1}^{n}(4k-2) \text{ par (HR)}$$

$$= (4(n+1)-2)\prod_{k=1}^{n}(4k-2)$$

$$= \prod_{k=1}^{n+1}(4k-2)$$

Exercice 10. $A = (1+3x)^4 = 81x^4+108x^3+54x^2+12x+1$, $B = (2-3x)^4 = 81x^4-216x^3+216x^2-96x+16$, $C = (1+x)^6+(1-x)^6 = 2x^6+30x^4+30x^2+2$.

Exercice 11.

1. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$
2. $\sum_{k=0}^{n}(-2)^{n-k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k(-2)^{n-k} = (1-2)^n = (-1)^n$
3. $\sum_{k=0}^{2n}(-3)^k\binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-3)^k 1^{2n-k} = (1-3)^{2n} = 4^n$
4. $\sum_{k=0}^{2n}(-3)^{n-k}\binom{2n}{k} = \frac{1}{(-3)^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}1^k(-3)^{2n-k} = \frac{1}{(-3)^n}(1-3)^{2n} = \left(\frac{-4}{3}\right)^n$.
5. **Première façon**

   On a pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

   Donc $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}k\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}$. Donc $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

   Deuxième façon

   Pour tout x réel, $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. En dérivant l'expression précédente par rapport à x, on obtient

   $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$.

   Ainsi en évaluant en $x=1$ on a $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$
6. **Première façon** Voir première façon de la question 4 ;

Deuxième façon En utilisant le développement de la deuxième façon de la question 4 et en évaluant cette fois en $x=2$ on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1}\binom{n}{k} = n3^{k-1}$ d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^{k}\binom{n}{k} = 2n3^{k-1}$

7. On a pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\binom{n+1}{k+1} = \dfrac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$. Soit $\dfrac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \dfrac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$.

   Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}$
   $\displaystyle= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{0}\right)$.

   Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

8. On procède comme dans 7) on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n-1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{1}{n+1}\binom{n}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}(-1)^k =$ $\displaystyle\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-1} = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = -\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k1^{n-k} - 1\right) = -\frac{1}{n+1}((1-1)^n - 1)$.

   Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n-1}{k} = \frac{1}{n+1}$.

9. **Première façon** Remarquer que $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$.

   Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2} = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} = n(n-1)2^{n-2}$.

   Deuxième façon Pour tout x réel, $(1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. En dérivant deux fois l'expression précédente par rapport à x, on obtient $n(n-1)(1+x)^{n-2} = \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)x^{k-2}$.

   Ainsi en évaluant en $x=1$ on a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = (n-1)n2^{n-2}$

10. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}(k(k-1)+k)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}(k(k-1)\binom{n}{k} + k\binom{n}{k})$
    $\displaystyle= \sum_{k=0}^{n}(k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}) = (n-1)n2^{n-2} + n2^{n-1}$(d'après 5) et 9)).

    Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$.

11. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(n-k)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\left(nk\binom{n}{k} - k^2\binom{n}{k}\right) = n\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$
    $= n^2 2^{n-1} - n(n+1)2^{n-2} = n(n-1)2^{n-2}$ (d'après 5) et 10))