Exercice 1

Écrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$:

1. $A = 2 + 6 + 10 + 14 + 18$.
2. $B = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6$.
3. $C = 3 - 6 + 9 - 12 + 15$.

Exercice 2

Simplifier les expressions suivante :

1. $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1})$
2. $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+2})$
3. $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+3})$
4. $\sum_{k=1}^{n}(a_{2k+1} - a_{2k+3})$
5. $\sum_{k=1}^{n}(a_{5k+6} - a_{5k+1})$

Exercice 3

Compléter :

1. $\sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{\cdots} a_{\dots}$
2. $\sum_{k=0}^{n} a_{k+3} = \sum_{j=\cdots}^{\cdots} a_j$

Exercice 4

Calculer les sommes suivantes en fonction de n :

$$A = \sum_{k=1}^{n} 2k \qquad B = \sum_{k=0}^{n}(5k-1) \qquad C = \sum_{k=2}^{n+2}(k-2)^2$$

$$D = \sum_{k=2}^{n}(k-2)(1-k)$$

Exercice 5

Calculer les sommes suivantes en fonction de n :

$$A = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{3^{k-1}} \qquad B = \sum_{k=0}^{n}(2 \times 7^k - 3 \times 7^{k+1})$$

$$C = \sum_{k=2}^{n} 3^{2k-1}$$

Exercice 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}$$

1. Déterminer les réels a et b tels que $\frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+3}$.
2. En déduire l'expression de S_n en fonction de n.

Exercice 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{k(k+1)(k+2)}$$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que $\frac{2k-1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$.
2. En déduire l'expression de S_n en fonction de n.

Exercice 8

Les but de cet exercice est de calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ sans utiliser la récurrence :

1. (a) vérifier que $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$.
   (b) En déduire le calcul de S_n.
2. (a) vérifier que $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$.
   (b) En déduire le calcul de T_n.
3. Comment procéderiez pour caluler $\sum_{k=1}^{n} k^3$?

Exercice 9

Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies : a) $\prod_{k=1}^{n} \alpha a_k = \alpha \prod_{k=1}^{n} a_k$ b) $\prod_{k=1}^{n} a_k b_k = \prod_{k=1}^{n} a_k \prod_{k=1}^{n} b_k$ c) $\prod_{k=1}^{n} a_k + b_k = \prod_{k=1}^{n} a_k + \prod_{k=1}^{n} b_k$?

Exercice 10

Calculer P lorsque :

1. $P = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$.
2. $P = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.
3. $P = \prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}$.

Exercice 11

Soient $a \in \mathbb{R}$ et

$$P = \prod_{k=0}^{n} (1 + a^{2^k})$$

a) Calculer P quand $a = 1$.
b) Calculer $(1-a)P$ quand $a \neq 1$ et en déduire la valeur de P.

Exercice 12

Exprimer $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$ puis $1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)$ à l'aide de factoriels

Exercice 13

Montrer de deux manières que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$

$$\prod_{k=1}^{n} (4k-2) = \prod_{k=1}^{n} (n+k)$$

Exercice 14

Écrire sans le signe somme :

a) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 3} a_{ij}$ b) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} a_{ij}$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4} a_{ij}$ d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4} i^2 a_{ij}$

Exercice 15

Écrire avec le signe somme double :

1. $(a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3}) + (a_{2,2} + a_{2,3}) + a_{3,3}$
2. $(a_{1,1} + 2a_{1,2} + 3a_{1,3}) + 2(a_{2,2} + 3a_{2,3}) + 3a_{3,3}$
3. $a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}$

Exercice 16

Calculer :

a) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 2015$ b) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$

c) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^2$ b) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (n-i)^2$

c) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j^3(n-i)^2$

Exercice 17

***

A partir des valeurs connues de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3$, calculer :

a) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)^2$ b) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij$ c) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j)$

Exercice 18

***

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $C_n = \sum_{1\leqslant p<q\leqslant n} (p+q)$ en remarquant

$$\sum_{1\leqslant p,q\leqslant n} p+q = 2C_n + 2\sum_{p=1}^{n} p$$

Exercice 19

Développer les expression suivantes : $A = (1+3x)^4$, $B = (2-3x)^4$, $C = (1+x)^6 + (1-x)^6$.

Exercice 20

Calculer les sommes suivantes
où $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-2)^{n-k}\binom{n}{k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-3)^{k}\binom{2n}{k}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-3)^{n-k}\binom{2n}{k}$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k\binom{n}{k}$
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$
8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n-1}{k}$
9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$
10. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$

11. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(n-k)\binom{n}{k}$

Exercice 21

1. Calculer de deux manières différentes $(1-1)^{101}$.
2. En déduire la formule :

$$\sum_{k=0}^{50}\binom{101}{2k+1} = \sum_{k=0}^{50}\binom{101}{2k}$$

Exercice 22

Soit $x \in \mathbb{R}$, m et n deux entiers naturels.

1. A l'aide de la formule du binôme de Newton, développer $(1+x)^{m+n}$ et $(1+x)^m \times (1+x)^n$.
2. En déduire la formule de Vandermonde :

$$\forall (m,\ n) \in \mathbb{N}^2,\ \forall p \in [\![0\,;m+n]\!],\ \binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$$