

Exercice 1

1. $A = \sum_{k=0}^4 (4k + 2)$
2. $B = \sum_{k=1}^6 (-1)^{k+1} k$
3. $C = \sum_{k=1}^5 (-1)^{k+1} 3k$

Exercice 2

1. $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$
2. $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+2}) = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) + \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_{k+2}) = a_1 - a_{n+1} + a_2 - a_{n+2}$
3. $\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+3}) = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) + \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_{k+2}) + \sum_{k=1}^n (a_{k+2} - a_{k+3}) = a_1 - a_{n+1} + a_2 - a_{n+2} + a_3 - a_{n+3}$
4. $\sum_{k=1}^n (a_{2k+1} - a_{2k+3}) = \sum_{k=1}^n (a_{2k+1} - a_{2(k+1)+1}) = a_3 - a_{2n+3}$
5. $\sum_{k=1}^n (a_{5k+6} - a_{5k+1}) = \sum_{k=1}^n (a_{5(k+1)+1} - a_{5k+1}) = a_{5n+6} - a_6$

Exercice 3

1. $\sum_{k=2}^n a_k = \sum_{j=0}^{n-2} a_{j+2}$
2. $\sum_{k=0}^n a_{k+3} = \sum_{j=3}^{n+3} a_j$

Exercice 4

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{k=1}^n 2k = 2 \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1) \\
 B &= \sum_{k=0}^n (5k - 1) = 5 \sum_{k=0}^n k - \sum_{k=0}^n 1 \\
 &= 5 \times \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) = (n+1) \left(\frac{5n}{2} - 1 \right) \\
 &= \frac{(n+1)(5n-2)}{2} \\
 C &= \sum_{k=2}^{n+2} (k-2)^2 = \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 D &= - \sum_{k=0}^n k(k+1) = - \sum_{k=0}^n k^2 - \sum_{k=0}^n k = - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = - \frac{n(n+1)(2n+4)}{6}
 \end{aligned}$$

Exercice 5

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3} \right)^{k-1} = 2 \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3} \right)^j \quad (j=k-1) \\
 &= 2 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 6 \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)
 \end{aligned}$$

$$B = -19 \sum_{k=0}^n 7^k = -19 \frac{1-7^{n+1}}{1-7} = \frac{19}{6} (1-7^{n+1})$$

$$C = 3 \times \sum_{k=2}^n 3^{2(k-1)}$$

$$= 3 \times \sum_{k=2}^n 9^{k-2} = 3 \times \sum_{j=0}^{n-2} 9^j \quad (j=k-2)$$

$$= 3 \times \frac{9^{n-1} - 1}{9 - 1} = \frac{3}{8} (9^{n-1} - 1)$$

Exercice 6

1. Première façon

On a :

$$\frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{1}{2} \times \frac{(k+3) - (k+1)}{(k+1)(k+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right)$$

Donc $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$.

Deuxième façon

On a :

$$\frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+3} = \frac{a(k+3) + b(k+1)}{(k+1)(k+3)} = \frac{(a+b)k + 3a + b}{(k+1)(k+3)}.$$

$$\text{Par identification} \begin{cases} a+b = 0 \\ 3a+b = 1 \end{cases} \text{ Soit } a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} 2. S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

Exercice 7

$$\begin{aligned} 1. \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} &= \frac{a(k+1)(k+2) + bk(k+2) + ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(a+b+c)k^2 + (3a+2b+c)k + 2a}{k(k+1)(k+2)}. \end{aligned}$$

$$\text{Par identification} \begin{cases} 2a = -1 \\ a+b+c = 0 \\ 3a+2b+c = 2 \end{cases}$$

Soit $a = -\frac{1}{2}$, $b = 3$ et $c = -\frac{5}{2}$.

$$\begin{aligned} 2. S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{k} + \frac{6}{k+1} - \frac{5}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) + \left(\frac{5}{k+1} - \frac{5}{k+2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - 1 + \frac{5}{2} - \frac{5}{n+2} \right) \\ &= \frac{3n^2 + n}{4(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{n(3n+1)}{4(n+1)(n+2)}$$

Exercice 8

1. (a) $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 \Leftrightarrow (k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$.
- (b) On d'après (a), $\sum_{k=1}^n ((k+1)^2 - k^2) = \sum_{k=1}^n (2k + 1)$. Le membre de gauche est une somme télescopique. Par linéarité de la somme on obtient :

$$(n+1)^2 - 1 = 2S_n + n,$$

Soit

$$2S_n = (n+1)^2 - (n+1) = n^2 + n.$$

Donc

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. (a) $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \Leftrightarrow (k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$.
- (b) On a d'après (a), $\sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3) = \sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1)$.

Le membre de gauche est une somme télescopique. Par linéarité de la somme on obtient :

$$(n+1)^3 - 1 = 3T_n + 3S_n + n,$$

Soit

$$3T_n = (n+1)^3 - (n+1) - 3\frac{n(n+1)}{2} = (n+1)\left((n+1)^2 - 1 - \frac{3n}{2}\right).$$

Donc

$$3T_n = (n+1)\frac{2n^2 + n}{2}$$

soit

$$3T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.$$

Donc

$$T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. On calcule $\sum_{k=1}^n ((k+1)^4 - k^4)$ de deux manières, par télescopage et en développant.

Exercice 10

1. $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{k}\right) = n+1$ (produit télescopique).
2. $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \left(\frac{k+1}{k} \times \frac{k-1}{k}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k} \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} = \frac{n+1}{2} \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2n}$
3. $\prod_{k=1}^n \frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)} = \prod_{k=2}^{n+1} \frac{k+1}{k} \prod_{k=1}^n \frac{k+2}{k+3} = \frac{n+1}{1} \times \frac{3}{n+3} = \frac{3(n+1)}{n+3}.$

Exercice 11

a) Pour $a = 1$ on a $P = 2^{n+1}$.

b) Pour $a \neq 1$, on remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(1 - a^{2^k})(1 + a^{2^k}) = (1 - a^{2^{k+1}})$.

On a alors $(1-a)(1+a) = (1-a^2)$; $(1-a)(1+a)(1+a^2) = (1-a^2)(1+a^2) = (1-a^{2^2})$; $(1-a)(1+a)(1+a^2)(1+a^{2^2}) = (1-a^{2^3})$, ..., $(1-a)(1+a) \cdots (1+a^{2^{n-1}})(1+a^{2^n}) = (1-a^{2^{n+1}})(1+a^{2^n}) = 1 - a^{2^{n+1}}.$

Soit $(1-a)P = 1 - a^{2^{n+1}}$. On en déduit que pour $a \neq 1$, $P = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a} = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} a^k.$

Exercice 12

$$2 \times 4 \times \cdots \times (2n) = \prod_{k=1}^n (2k) = 2^n \prod_{k=1}^n k = 2^n n!$$

$$1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1) = \frac{\prod_{k=1}^n (2k) \prod_{k=1}^n (2k+1)}{\prod_{k=1}^n (2k)} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

Exercice 13

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a d'une part

$$\prod_{k=1}^n (4k-2) = \prod_{k=1}^n 2(2k-1) = 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{2^n \prod_{k=1}^n (2k-1) \prod_{k=1}^n 2k}{\prod_{k=1}^n 2k} = \frac{2^n (2n)!}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{n!}.$$

D'autre part

$$\prod_{k=1}^n (n+k) = \frac{\prod_{k=1}^n k \prod_{k=1}^n (n+k)}{\prod_{k=1}^n k} = \frac{(2n)!}{n!}.$$

$$\text{Donc } \prod_{k=1}^n (4k-2) = \prod_{k=1}^n (n+k).$$

Exercice 14

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \sum_{1 \leq i, j \leq 2} a_{ij} = a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} \\ \text{b)} \quad & \sum_{1 \leq i < j \leq 2} a_{ij} = a_{12} + a_{13} + a_{23} \\ \text{c)} \quad & \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^3 a_{ij} = a_{12} + a_{13} + a_{23} \end{aligned}$$

Exercice 15

$$\begin{aligned} 1. \quad & (a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3}) + (a_{2,2} + a_{2,3}) + a_{3,3} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq 3} a_{ij} \\ 2. \quad & (a_{1,1} + 2a_{1,2} + 3a_{1,3}) + 2(a_{2,2} + 3a_{2,3}) + 3a_{3,3} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq 3} j a_{ij} \\ 3. \quad & a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} = \sum_{1 \leq i \leq 3} a_{ii} \end{aligned}$$

Exercice 16

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij = \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{j=1}^n j \right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ \text{b)} \quad & \sum_{1 \leq i, j \leq n} i^2 = \left(\sum_{i=1}^n i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n 1 \right) = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

$$c) \sum_{1 \leq i, j \leq n} (n-i)^2 = \left(\sum_{i=1}^n (n-i)^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n 1 \right) = \left(\sum_{i=1}^n i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n 1 \right) = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 17

$$\begin{aligned} a) \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij &= \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} ij = \sum_{j=2}^n j \left(\sum_{i=1}^{j-1} i \right) = \sum_{j=2}^n j \frac{(j-1)j}{2} = \sum_{j=1}^n j \frac{(j-1)j}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j^3 - j^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) = \frac{n(n+1)}{4} \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(2n+1)}{3} \right) \\ &= \frac{n(n+1)}{4} \times \frac{3n^2 - n - 2}{6} = \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24} \\ b) \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \min(i, j) + \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \min(i, j) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} i + \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} j = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i j \\ &= \sum_{j=2}^n \frac{(j-1)j}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)}{2} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{(j-1)j}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)}{2} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{(i-1)i}{2} + \frac{i(i+1)}{2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Exercice 18

En remarquant que $\sum_{1 \leq p < q \leq n} p + q = \sum_{1 \leq q < p \leq n} p + q$ par symétrie des indices, on a

$$\sum_{1 \leq p, q \leq n} p + q = \sum_{1 \leq p < q \leq n} p + q + \sum_{1 \leq q < p \leq n} p + q + \sum_{1 \leq p = q \leq n} p + q = 2C_n + 2 \sum_{p=1}^n p$$

$$\text{D'autre part } \sum_{1 \leq p, q \leq n} p + q = \sum_{1 \leq p, q \leq n} p + \sum_{1 \leq p, q \leq n} q = n \frac{n(n+1)}{2} + n \frac{n(n+1)}{2} = n^2(n+1)$$

$$\text{D'où } C_n = \frac{n^2(n+1) - n(n+1)}{2} = \frac{(n-1)n(n+1)}{2} \text{ On obtient alors}$$

$$C_n = \frac{n^2(n+1) - n(n+1)}{2} = \frac{(n-1)n(n+1)}{2}$$

Exercice 19

$$A = (1+3x)^4 = 81x^4 + 108x^3 + 54x^2 + 12x + 1, \quad B = (2-3x)^4 = 81x^4 - 216x^3 + 216x^2 - 96x + 16, \\ C = (1+x)^6 + (1-x)^6 = 2x^6 + 30x^4 + 30x^2 + 2.$$

Exercice 20

- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$
- $\sum_{k=0}^n (-2)^{n-k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k (-2)^{n-k} = (1-2)^n = (-1)^n$
- $\sum_{k=0}^{2n} (-3)^k \binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-3)^k 1^{2n-k} = (1-3)^{2n} = 4^n$
- $\sum_{k=0}^{2n} (-3)^{n-k} \binom{2n}{k} = \frac{1}{(-3)^n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^k (-3)^{2n-k} = \frac{1}{(-3)^n} (1-3)^{2n} = \left(\frac{-4}{3}\right)^n.$

5. Première façon

On a pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$.

Donc $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}$. Donc $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$

Deuxième façon

Pour tout x réel, $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$. En dérivant l'expression précédente par rapport à x , on obtient

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k x^{k-1}.$$

Ainsi en évaluant en $x = 1$ on a $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$

6. Première façon Voir première façon de la question 4;

Deuxième façon En utilisant le développement de la deuxième façon de la question 4 et en évaluant cette fois en $x = 2$ on obtient $\sum_{k=1}^n k 2^{k-1} \binom{n}{k} = n 3^{n-1}$ d'où $\sum_{k=1}^n k 2^k \binom{n}{k} = 2n 3^{n-1}$

7. On a pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$. Soit $\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{0} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

8. On procède comme dans 7) on a $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n-1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{n+1} \binom{n}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} (-1)^k =$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k-1} = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k = -\frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k - 1 \right) = -\frac{1}{n+1} ((1-1)^n - 1).$$

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n-1}{k} = \frac{1}{n+1}.$$

9. Première façon Remarquer que $k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$.

$$\text{Ainsi } \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} = \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} = n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} = n(n-1) 2^{n-2}.$$

Deuxième façon Pour tout x réel, $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$. En dérivant deux fois l'expression précédente par rapport à x , on obtient $n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} k(k-1) x^{k-2}$.

Ainsi en évaluant en $x = 1$ on a $\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} = (n-1)n2^{n-2}$

$$\begin{aligned} 10. \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^n (k(k-1) + k) \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n (k(k-1) \binom{n}{k} + k \binom{n}{k}) \\ &= \sum_{k=0}^n (k(k-1) \binom{n}{k}) + \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = (n-1)n2^{n-2} + n2^{n-1} \text{ (d'après 5) et 9)}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

$$\begin{aligned} 11. \sum_{k=0}^n k(n-k) \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^n \left(nk \binom{n}{k} - k^2 \binom{n}{k} \right) = n \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} - \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} \\ &= n^2 2^{n-1} - n(n+1)2^{n-2} = n(n-1)2^{n-2} \text{ (d'après 5) et 10)} \end{aligned}$$