Exercice 1. *Soient A, B et C trois matrices à coefficients réels définies par :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer $3A$ et $B - 2C$.*
2. *Calculer AB et AC. Que remarque-t-on ?*

Exercice 2. *Soient A, B et C trois matrices à coefficients réels définies par :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculer AB, BA, AC et CA. Que remarque peut-on remarquer ?

Exercice 3. *Soient A, B, C et D quatre matrices à coefficients réels définies par :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Vérifier par le calcul que $(A + D)C = AC + DC$.*
2. *Vérifier par le calcul que $(AB)C = A(BC)$.*
3. *Calculer ${}^tC\,{}^tA$ et vérifier que ${}^t(AC) = {}^tC\,{}^tA$.*

Exercice 4. *Soit A la matrice définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2 et montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_3$. En déduire que la matrice A est invesible et calculer A^{-1}.

Exercice 5. *Soit A la matrice définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2 et montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_4$. En déduire que la matrice A est invesible et calculer A^{-1}.

Exercice 6. *Soit M la matrice définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit J la matrice définie par $J = M - I_3$.*

1. *Calculer J, J^2 et J^3.*
   En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, J^k
2. *A l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$*

Exercice 7. *On considère les matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer PQ. Qu'est-ce qu'on peut en déduire ?*
2. *Vérifier que $A = PDQ$.*
3. *Montrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nQ$.*

4. Expliciter A^n.

Exercice 8. *Déterminer l'inverse des matrices suivantes, quand cette matrice inverse existe :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9. *On considère la matrice A définie par :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Vérifier que A est inversible et calculer son inverse.*
2. *Calculer $A^3 - 4A^2 - 6A$. En déduire une expression de A^{-1} en fonction de A et de I_3.*

Exercice 10. *Soit α un réel donnée. On donne :*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrices A est-elles inversible ? Dans ce cas, calculer son inverse.

Exercice 11. 1. *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B carrées d'ordre 2 telles que $AB = BA$.*

2. *Déterminer toutes les matrices diagonales M d'ordr 2 telles que $M^2 - M - 2I_2 = 0$.*

Exercice 12. 1. *Soient A et B deux matrices carrées non nulles telles que $AB = 0$. Montrer que A et B ne sont pas inversibles.*

2. *Soit A une matrice carrée non nulle. Supposons qu'il existe un entier naturel non nul n tel que $A^n = 0$. Montrer que A n' est pas inversible.*

Exercice 13. *Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et A et B de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $B^2 = B$.*

1. *On suppose que l'on a $AB = -BA$. Montrer que $AB = -ABA$ puis $AB = BA$.*
   En déduire les égalités $AB = BA = 0$
2. *Démontrer l'équivalence suivante : $(A + B)^2 = A + B \Leftrightarrow AB = BA = 0$*

Exercice 14. *Soit la matrice :*

$$\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation : $X^2 = A$

Exercice 15. *Déterminer toutes matrices diagonales X d'ordre 3 vérifiant l'équation :*

$$X^2 - X - 2I = 0.$$

Exercice 16. *Soit A une matrice carrée d'odre $n \in \mathbb{N}^*$. On supose qu'il existe un entier p tel $A^p = 0$.*
Calculer $(I - A)(I + A + \cdots + A^{p-1})$. En déduire que $I - A$ est inversible puis calculer son inverse.