Exercice 1.

1. Suite géométrique donnée sous une forme explicite.
2. Suite géométrique définie par récurrence.
3. Suite arithmétique donnée sous une forme explicite. Décomposer pour écrire cette expression sous la forme classique $c_0 + nr$.
4. Suite arithmétique définie par récurrence.
5. $e_8 = e_3 + (8-3)r$ (relation entre deux termes quelconques de la suite. On trouve ensuite r. Écrire ensuite une relation reliant e_3 et e_0 pour calculer e_0
6. Mêmes idées que la question précédente, à adapter au cas d'une suite géométrique.
7. L'exemple le plus facile ! La suite est CONSTANTE.
8. Mêmes idées que les questions 5 et 6, et aussi simple si on est prêt à trouver une raison irrationnelle...

Exercice 2.

1. On trouve $u_1 = \sqrt{10}, u_2 = \sqrt{11}, u_3 = \sqrt{12}$. Comme on a aussi $u_0 = 3 = \sqrt{9}$, cela conduit à la conjecture suivante : pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n+9}$, qu'on démontre par récurrence.
   Initialisation : la propriété est vrai pour $n = 0$, $u_0 = 3 = \sqrt{0+9}$
   Hérédité :
   supposons que pour un entier naturel n $u_n = \sqrt{n+9}$ alors
   $$u_{n+1} = \sqrt{1 + \left(\sqrt{n+9}\right)^2} = \sqrt{9+n+1}$$
   Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
   Conclusion : pour tout n $u_n = \sqrt{n+9}$

   Remarque : on peut retrouver ce résultat en montrant que cette suite est bien définie, positive et que la suite (u_n^2) est arithmétique de raison 1.
2. **Première façon utilisant la récurrence** Commencer par raisonner ainsi : calculer u_1 et u_2 grâce à la relation de récurrence. On peut ensuite faire le raisonnement suivant : si la formule explicite donnée est vraie, je peux alors calculer $u_0,\ u_1$ et u_2 (qui sont connues) en fonction de $a,\ b$ et c (c'est le même principe que la méthode pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 pour trouver la valeur de λ et μ). On en déduit ensuite $a,\ b$ et c en résolvant le système obtenu. On trouve $a = 1, b = -12$ et $c = 0$. Ce n'est pas fini. Il reste à montrer que la formule est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ (alors qu'on sait juste pour le moment qu'elle est vraie pour $n = 0,\ 1$ et 2. On montre cela par récurrence en remplaçant $a,\ b$ et c par les valeurs trouvées. L'hérédité se fait à l'identique par rapport au premier point de l'exercice.
   Deuxième façon n'utilisant pas la récurrence
   On a pour tout $k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} - u_k = 2k - 11$ d'après les données de l'énoncé.
   D'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(2k-11)$. Or $n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0 = u_n$ (télescopage) et $\sum_{k=0}^{n-1}(2k-11) = 2\sum_{k=0}^{n-1} k - \sum_{k=0}^{n} 11 = n(n-1) - 11n = n^2 - 12n$. Donc $a = 1, b = -12$ et $c = 0$.

Exercice 3.

Exercice 4. On définit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in N}$ par $a_0 = 0$ et $b_0 = 12$, puis pour $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3}$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4}$

1. On considère la suite (u_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = b_n - a_n$.
   (a) On a $u_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3} - \dfrac{a_n + 3b_n}{4} = \dfrac{5a_n - 5b_n}{12} = \dfrac{5}{12}u_n$. Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$ et son premier terme $u_0 = b_0 - a_0 = -12$.
   (b) On déduit de a) que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\dfrac{5}{12}\right)^n u_0$, soit $u_n = \dfrac{5^n}{12^{n-1}}$.
2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 4b_n + 3a_n$.

(a) $v_{n+1} = 4b_{n+1} + 3a_{n+1} = \dfrac{4(a_n + 3b_n)}{4} + \dfrac{3(2a_n + b_n)}{3} = 3a_n + 4b_n = v_n$.
Donc la suite (v_n) est constante.

(b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 = 4b_0 + 3a_0 = 48$.

3.

4. En résolvant pour $n \in \mathbb{N}$, le système $\begin{cases} u_n &= b_n - a_n \\ v_n &= 4b_n + 3a_n \end{cases}$ On trouve pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$\begin{cases} a_n &= -\dfrac{4}{7}\dfrac{5^n}{12^{n-1}} + \dfrac{1}{7} \times 48 \\ b_n &= \dfrac{3}{7} \times \dfrac{5^n}{12^{n-1}} + \dfrac{1}{7} \times 48 \end{cases}$

5. On obtient

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} b_k \\ S_n &= \frac{36}{7}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{5}{12}\right)^k + \frac{1}{7}\sum_{k=0}^{n} 48 \\ S_n &= \frac{36}{7} \times \frac{1-\left(\frac{5}{12}\right)^{n+1}}{1-\frac{5}{12}} + \frac{48}{7}(n+1) \\ S_n &= \frac{432}{49} \times \left(1-\left(\tfrac{5}{12}\right)^{n+1}\right) + \frac{48}{7}(n+1) \end{aligned}$$

Exercice 5 (Ecriture rationnelle vs écriture périodique). On remarque que $u_1 = \dfrac{1}{100}u_0 = 0,0027$ et $u_2 = \dfrac{1}{100}u_1 = 0,000027$. Ainsi $0,2727 = u_0 + u_1$ et $0,272727 = u_0 + u_1 + u_2$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \underbrace{0,27\cdots27}_{n-1\ fois}$. Or, il est facile de calculer explicitement S_n (somme de référence !). Le nombre cherché est ensuite obtenu via un calcul simple de limite (de référence aussi). Pour le nombre, $0,999999\cdots$, on adapte avec la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$ et de premier terme $0,9$. Le reste est identique.

Exercice 6 (Une suite homographique).

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{2-u_{n+1}}{2u_{n+1}} = \dfrac{2-\dfrac{3u_n}{2u_n-1}}{2\dfrac{3u_n}{2u_n-1}} = \dfrac{u_n-2}{6u_n} = -\dfrac{1}{3}v_n$.
$v_0 = \dfrac{2-\frac{1}{4}}{2\times\frac{1}{4}} = \dfrac{7}{2}$.
La suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{7}{2}$.
2. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{7}{2} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$, mais $v_n = \dfrac{2-u_n}{2u_n}$ ce qui donne $u_n = \dfrac{2}{2v_n+1}$.
En conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2}{7\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n + 1}$.

Exercice 7 (Changement de suites divers).

1. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}u_{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1} \times 2\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}u_n = 2v_n$.
$v_1 = \dfrac{1+2}{1+1}u_0 = \dfrac{4}{3}$. Ainsi la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_1 = \dfrac{4}{3}$.
(b) Comme pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{n+1}{n}u_n$ et $v_n = \dfrac{4}{3}2^{n-1}$ alors $u_n = \dfrac{n}{n+1}v_n = \dfrac{n}{n+1} \times \dfrac{4}{3}2^{n-1}$.
2. (a) $u_0 = 3 > 1$.
Supposons que pour n fixé, $u_n > 1$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x-1}+1$ est strictement croissante sur $]1;+\infty[$,

alors $f(u_n) > f(1)$ soit $u_{n+1} > 1$.
On vient de démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n que $u_n > 1$.

(b) Montrons que la suite v définie par $v_n = \ln(u_n - 1)$ est géométrique.
$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln\left(\sqrt{u_n - 1} + 1 - 1\right) = \ln\left(\sqrt{u_n - 1}\right) = \frac{1}{2}\ln(u_n - 1) = \frac{1}{2}v_n$.
$v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln(2)$. Ainsi la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $\ln(2)$.

(c) En utilisant pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression $v_n = \ln(u_n - 1)$ on obtient que $u_n = \mathrm{e}^{v_n} + 1$. Ce qui donne :

$$u_n = \mathrm{e}^{\ln(2)\left(\frac{1}{2}\right)^n} + 1 = 2^{\frac{1}{2^n}}$$

Exercice 8. 1. Si $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant 2u_n$ alors démontrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 3 \cdot 2^n$.
$u_0 = 3$ et $3 \times 2^0 = 3$ donc $u_0 \geqslant 3$.
Supposons que pour n fixé $u_n \geqslant 3 \times 2^n$. $u_{n+1}u_{n+1} \geqslant 2u_n \geqslant 2\times \geqslant 3 \times 2^n = 3 \times 2^{n+1}$.
Ainsi on vient de démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 3 \cdot 2^n$.
Comme $2 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ par comparaison, on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. Si $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}v_n$ alors démontrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
$v_0 = 3$ et $3 \times 2^0 = 3$ donc $v_0 \leqslant 3$.
Supposons que pour n fixé $v_n \leqslant 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$. $v_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}v_n \leqslant \dfrac{1}{2} \times 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
Ainsi on vient de démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Comme $\frac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, sachant que (v_n) est positive, on en déduit par comparaison que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Exercice 9. Soit u de terme général $\dfrac{n!}{a^n}$.

1. Si $0 < a < 1$:
on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$, et dans ce cas $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{a^n} = +\infty$.

2. **Si a>1 :**
(a) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)!}{a^{n+1}} \times \dfrac{a^n}{n!} = \dfrac{n+1}{a}$
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$. A partir d'un certain rang n_0, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 2$.
(b) La suite u est strictement positive. Montrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour $n \geqslant n_0$ alors : $u_n \geqslant 2^{n-n_0}u_{n_0}$.
$u_{n_0}2^{n_0-n_0} = u_0$ donc $u_0 \geqslant u_{n_0}2^{n_0-n_0} = u_0$.
Supposons maintenant que pour $n \geqslant n_0$ fixé, $u_n \geqslant 2^{n-n_0}u_{n_0}$. D'après la question précédente, pour $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \geqslant 2u_n$ ce qui donne $u_{n+1} \geqslant 2\left(2^{n-n_0}u_{n_0}\right) = 2^{n-n_0+1}u_{n_0}$. On a démontré que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 2^{n-n_0}u_{n_0}$.

(c) Comme $u_0 > 0$ et $2 > 1$ on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n-n_0}u_{n_0} = +\infty$ ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ d'après les théorèmes de comparaison.

Exercice 10. Soit u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$.

1. L'équation $P(X) = X^2 - X - 12 = 0$ admet deux solutions à savoir $X_1 = -3$ et $X_2 = 4$.
Donc $P(X) = (X-4)(X+3)$ et $P(X) < 0 \Leftrightarrow X \in]-3\,;4[$.
2. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: "u_n est défini et $0 < u_n < 4$" Pour $n = 0$, $u_n = 1$ est défini et $0 < u_n < 4$. Supposons que pour un entier naturel n, u_n est défini et $0 < u_n < 4$. Montrons que $u_{n+1} <$ est défini et $0 < u_{n+1} < 4$.
En effet, la fonction $f \ : \ x \mapsto \sqrt{x+12}$ est strictement est croissante sur $]0\,;+\infty[$. Comme $u_n \in]0\,;+\infty[$ on a $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini et $0 < f(0) = \sqrt{12} < u_{n+1} < f(4) = 4$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

3. Montrons que u est strictement croissante.

Première façon utilisant la récurrence

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$u_n < u_{n+1}$" Pour $n = 0$, $u_0 = 1 < u_1 = \sqrt{13}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supposons que pour un entier naturel n, $u_n < u_{n+1}$. Montrons que $u_{n+1} < u_{n+2}$. En effet, comme f est strictement croissante et $u_n < u_{n+1}$ d'après l'hypothèse de récurrence, on a $f(u_n) < f(u_{n+1})$, soit $u_{n+1} < u_{n+2}$.

On conclut que (u_n) est strictement croissante.

Deuxième façon utilisant la question 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 12} - u_n = \dfrac{\sqrt{u_n + 12}^2 - u_n^2}{\sqrt{u_n + 12} + u_n} = \dfrac{-P(u_n)}{\sqrt{u_n + 12} + u_n}$.

Comme $u_n \in]0\,;4[$, le dénominateur est strictement positif et le numérateur est strictement positif puisque $P(X) < 0$ pour tout $X \in]-3\,;4[$, d'où $u_{n+1} - u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

4. (a) (u_n) est croissante et majorée (d'près 2) et 3)),donc d'après le théorème de convergence monotone u converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$.

   (b) $0 < l \leqslant 4$.

   (c) Montrons que l vérifie $P(l) = 0$.
   La fonction f est continue sur $]0\,;+\infty[$ et $l \in]0\,;+\infty[$, donc l est solution de l'équation $x = f(x)$. Or, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $f(x) = x \Leftrightarrow x + 12 = x^2 \Leftrightarrow P(x) = 0$.

   (d) D'après c) l est solution de $P(x) = 0$. Donc $l = -3$ ou $l = 4$. Mais $l > 0$ d'après b), donc $l = 4$.

Exercice 11.

Exercice 12.

Exercice 13. 1. (a) La fonction f est définie sur $]0\,;+\infty[$, elle est croissante comme somme de deux fonctions croissantes

   (b) On a $f(x) - x = \ln x$. Donc $f(x) - x$ est négatif sur $]0\,;1[$ et positif sur $]1\,;+\infty[$.

2. (a) D'après l'énoncé $u_0 > 1$ donc $u_0 \geqslant 1$.
   Supposons pour n fixé que $u_n \geqslant 1$, alors $\ln(u_n) \geqslant 0$. Ainsi $u_{n+1} = \ln(u_n) + u_n \geqslant u_n$ or par hypothèse $u_n \geqslant 1$. Ainsi $u_{n+1} \geqslant 1$.
   On a montré que pour tout n $u_n \geqslant 1$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$ donc $u_{n+1} - u_n = \ln(u_n) \geqslant 0$. La suite (u_n) est donc croissante.

   (b) Supposons par l'absurde que la suite est majorée, elle est donc convergent de limite l qui vérifie $l = l + \ln(l)$. (La fonction $f : x \mapsto x + \ln(x)$ est continue sur $]0;+\infty[$.
   Ce qui veut dire que $\ln(l) = 0$ soit $l = 1$. On sait que la suite u est croissante et pour tout $u_n \geqslant 1$ donc $1 \leqslant u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} u_n = 1$, ce qui veut dire que la suite u est constante égale à 1. Absurde car $u_0 > 1$. La suite u est donc non majorée.
   En résumé la suite u est croissante et non majorée, elle a donc pour limite $+\infty$.

   (c) Soit v définie par $v_0 \in]0, 1[$ et pour tout entier n, $v_{n+1} = f(v_n)$. Supposons par l'absurde que la suite est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme précédemment on montre que la suite est décroissante non minorée et donc de limite $-\infty$. Il existe donc un rang n à partir duquel $v_n < 0$ ce qui empêche de définir $\ln(u_n)$ ou encore u_{n+1}. On en déduit alors que la suite n'est pas définie à partir d'un certain rang.

Exercice 14. 1. Par décroissante de la fonction inverse, on peut écrire que pour $n, k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{n}{n^2 + n} \leqslant \frac{n}{n^2 + k} \leqslant \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + 1}$$

Or $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2 + n} = n \times \dfrac{n}{n^2 + n} = \dfrac{n^2}{n^2 + n}$.

Et $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+1} = n \times \dfrac{n}{n^2+1} = \dfrac{n^2}{n^2+1}$.
Donc

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \leqslant \frac{n^2}{n^2+1}$$

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leqslant w_n \leqslant \frac{n^2}{n^2+1}$$

2. Par le théorème d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2+1} = 1$.

Exercice 15. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k-1}$.

1. (a) Pour tout $n \geqslant 1$: $2n+1$ est impair donc $(-1)^{2n+1} = -1$ et $2n+2$ est pair donc $(-1)^{2n+2} = 1$.

$$\frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)-1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)-1} = \frac{-1}{2(2n+1)-1} + \frac{1}{2(2n+2)-1} = \frac{-(2(2n+2)-1)+2(2n+1)-1}{(2(2n+2)-1)(2(2n+1)-1)}$$

En développant et réduisant

$$\frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)-1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)-1} = \frac{-2}{(4n+1)(4n+3)}$$

(b) Pour tout n,

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{2k-1} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k-1} = \sum_{k=2n+1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{2k-1} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)-1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)-1}$$

D'après la première question, on en déduit que

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-2}{(4n+1)(4n+3)} < 0$$

La suite v_n est bien décroissante.

2. Pour tout n,

$$w_{n+1} - w_n = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{2k-1} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k-1} = \sum_{k=2n+2}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{2k-1} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)-1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2(2n+3)-1}$$

Or $(-1)^{2n+3} = -1$.

$$\frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)-1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2(2n+3)-1} = \frac{2(2n+3)-1-(2(2n+2)-1)}{(2(2n+2)-1)(2(2n+3)-1)} = \frac{2}{(4n+3)(4n+5)} > 0$$

On en déduit que

$$w_{n+1} - w_n > 0$$

La suite w_n est bien croissante.

3. $w_n - v_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \dfrac{(-1)^k}{2k-1} - \sum_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^k}{2k-1} = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)-1} = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{4n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^{2n+1}}{4n+1} = 0$

4. Les deux suites v et w sont adjacentes, elles convergent vers une même limite l.

Exercice 16 (Changement de suite (difficile) ECRICOME 1999).]

Soit (x_n) une suite numérique qui vérifie, pour tout entier naturel n, la relation :

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

1. La suite (x_n) est récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants.
   Son équation caractéristique $r^2 - \frac{1}{3}r - \frac{1}{3} = 0$ a pour discriminant $\Delta = \frac{1}{9} + \frac{4}{3} = \frac{13}{9}$ et pour solutions $r_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$.
   Il existe donc deux réels A et B tels que pour tout $n \in \mathbb{N} : x_n = A\,(r_1)^n + B\,(r_2)^n$.
   Et ces deux racines appartenant à $]-1,1[$ on a alors $(r_1)^n \to 0$ et $(r_2)^n \to 0$.
   Conclusion : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = 0}$
   a et b sont deux réels supérieurs ou égaux à 1
2. On étudie la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = a\ \ u_1 = b$ et pour tout entier naturel n :
   $$u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$$
   Si u a une limite finie ℓ alors $\ell \geqslant 1$ et u_{n+1} et u_{n+2} également.
   La fonction $\sqrt{\ }$ étant continue sur $\mathbb{R}^+$ et ℓ en étant élément, $\ell = \sqrt{\ell} + \sqrt{\ell}$
   donc $\ell^2 = 4\ell$ d'où $\ell = 4$ ou $\ell = 0$ et comme $\ell \geqslant 1$
   Conclusion : $\boxed{\text{la seule limite possible de la suite } (u_n) \text{ est } 4.}$
3. On se propose d'établir la convergence de la suite (u_n) par l'étude d'une suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :
   $$v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$$
   (a) On a $u_n = (2v_n + 1)^2$ alors si $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$.
   (b) On simplifie l'égalité par équivalence : $(2 + v_n \neq 0\ )$
   $$\begin{aligned} v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})} &\iff 2(2 + v_{n+2})v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \\ &\iff 2\left(2 + \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} - 1\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} - 1\right) = \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+1}} - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1 \\ &\iff 2\left(\frac{1}{4}u_{n+2} - 1\right) = \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+1}} + \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 2 \\ &\iff u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n} \end{aligned}$$
   cette égalité étant vraie, la premièer également.
   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n : v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}.}$
   Comme $u_{n+2} \geqslant 1$ alors $v_{n+2} = \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} - 1 \geqslant -\frac{1}{2}$ et $2\,(2 + v_{n+2}) \geqslant 3$
   donc $v_{n+2} \leqslant \frac{1}{3}\,(v_{n+1} + v_n)$
   Et comme (inégaité triangulaire) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ pour tout a et b réel :
   Conclusion : $\boxed{|v_{n+2}| \leqslant \frac{1}{3}\,(|v_{n+1}| + |v_n|)\,.}$
   (c) On note (x_n) la suite définie par : $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et, pour tout entier naturel n,
   $$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$
   On procède comme précédemment avec l'HR sur n et $n + 1$:
   Pour $n = 0$ on a $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|v_n| \leqslant x_n$ et $|v_{n+1}| \leqslant x_{n+1}$ alors
   $$\begin{aligned} |v_{n+2}| &\leqslant \frac{1}{3}\,(|v_{n+1}| + |v_n|) \\ &\leqslant \frac{1}{3}\,(x_n + x_{n+1}) = x_{n+2} \end{aligned}$$
   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 0 \leqslant |v_n| \leqslant x_n}$
   et comme $x_n \to 0$ d'après la première question, alors par encadrement :
   Conclusion : $\boxed{v_n \to 0 \text{ quand } n \to +\infty}$

Exercice 17. 1. (a) Soit f la fonction définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x+1}{x}$ et g la composée $g = fof$ définie par $g(x) = f(f(x))$. Etudier les sens de variation sur $\mathbb{R}^+$ de f et de g.
(b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation de $f(x) = x$, puis $g(x) = x$. (On montrera qu'elles ont les mêmes solutions solutions a et b avec $b < 0 < a$, que $b = -1/a$ et que $b = 3 - a$)
Soit u la suite définie par : $u_0 > 0$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Montrer que, $\forall n$, $u_n$est défini et $u_n > 0$
3. On suppose dans cette question que $u_0 = 1$. On définit les suites v et w par : $\forall n$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1} = f(v_n)$.
(a) Montrer que pour tout entier n, $v_{n+1} = g(v_n)$.
(b) Montrer que la suite v et croissante majorée par a. En déduire que v converge vers a.
(c) En déduire que w converge également vers a. Conclure pour u en utilisant le résultat suivant, admis : si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, alors u converge vers cette limite.
4. On pose pour tout entier n, $z_n = \dfrac{u_n - a}{u_n - b}$. (les valeurs a et b étant celles définies précédemment).
On ne suppose plus que $u_0 = 1$ mais seulement que $u_0 > 0$.
(a) Montrer que, pour tout entier n, $z_n$est bien définie et que z est une suite géométrique.
(b) Déterminer la valeur de u_n en fonction de z_n. Déterminer sa limite quand n tend vers l'infini.

Exercice 18 (Critère de d'Alembert). Soit (u_n) une suite de termes strictement positifs et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que $a \in]1\,;\infty[$ et qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant a$.
   (a) Montrer que $u_n \geqslant a^{n-n_0} u_{n_0}$.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
   (c) En déduire que la suite (S_n) divergente.
2. On suppose que $a \in]0\,;1[$ et qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant a$.
   (a) Montrer que $u_n \leqslant a^{n-n_0} u_{n_0}$.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   (c) On note pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k$
      i. Montrer que la suite (v_n) est majorée par $\dfrac{1}{1-a}$, puis qu'elle converge.
      ii. En déduire que la suite (S_n) est convergente.
   (d) Application :
   Quelle est la nature des suites de termes général :
   $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{n!}$ où $a \in]0\,;1[$. $\qquad v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{n!}$ où $a \in]1\,;+\infty[$.

Exercice 19. Soient (u_n) et (u_n) les suites définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$ $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!n}$. Montrer que ces deux suites ont adjacentes, puis qu'elles convergent.