Exercice 1

Reconnaître des suites. Pour chacune des suites suivantes :

1. Dire si elle est arithmétique ou géométrique et préciser sa raison   2. Donner sa forme expilcite.   3. Donner son premier terme et une définition par récurrence.   4. Exprimer $u_0 + \cdots + u_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$. (*certaines de ces infos sont contenues dans l'énoncé...*)

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $a_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $b_0 = -1$ et $b_{n+1} = 3b_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $c_n = \frac{n+1}{3}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
4. $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $d_0 = -1$ et $d_{n+1} = d_n + 2$ pour $n \in \mathbb{N}$.
5. $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique tq $e_3 = 5$ et $e_8 = 20$.
6. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de raison 2 tq $f_3 = 128$.
7. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à 4.
8. $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique tq $h_{10} = 10$ et $h_{12} = 20$.

Exercice 2

1. Calculer les premiers termes de la suite : $\begin{cases} u_0 &= 3 \\ u_{n+1} &= \sqrt{1+u_n^2} \end{cases}$ puis conjecturer une formule explicite et la démontrer par récurrence.
2. On définit la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= u_n + 2n - 11, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = an^2 + bn + c$, où a, b et c sont trois nombres réels à préciser.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 14$ et $u_{n+1} = 6 - \frac{1}{2}u_n$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Représenter les droites d'équation $y = x$ et $y = 6 - 0,5x$, puis conjecturer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et les variations de la suite.
3. Donner une expression explicite de u_n pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, puis $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 4

On définit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in N}$ par $a_0 = 0$ et $b_0 = 12$, puis pour $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3}$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4}$

1. On considère la suite (u_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = b_n - a_n$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$ et de premier terme à préciser.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.
2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 4b_n + 3a_n$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est constante.
   (b) Préciser quelle est la valeur constante de v_n.
3. A l'aide des questions 1(b) et 2(b) , calculer les expressions de a_n et b_n pour tout entier naturel n.
4. Calculer $S_n = b_0 + b_1 + ... + b_n$ en fonction de n.

Exercice 5

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 0{,}27$ et de raison $\frac{1}{100}$ et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, pour $n \in \mathbb{N}$.

A l'aide de ces outils, donner l'écriture rationnelle de $0,272727....$ Adapter la méthode pour démontrer que $0,999.... = 1$

Exercice 6

La suite (u_n) est définie par $u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{2u_n - 1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{2}$.

On admet que les termes u_n et v_n sont définis pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 7

1. Soit u la suite définie par : $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 2\dfrac{(n+1)^2}{n\,(n+2)}u_n$

(a) Montrer que la suite v définie par : pour tout entier $n \geqslant 1 v_n = \dfrac{n+1}{n}u_n$ est géométrique. (b) En déduire la valeur de u_n en fonction de n.

2. Soit u la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 1} + 1$.

(a) Montrer que pour tout entier n, u_n est défini et $u_n > 1$.

(b) Montrer que la suite v définie par $v_n = \ln(u_n - 1)$ est définie et est géométrique.

(c) En déduire la valeur de u_n en fonction de n.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite telle que $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{4u_n}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $v_n = \ln u_n$.

(a) Montrer par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$: « u_n défini et $u_n > 0$ » (b) Montrer que : $\forall n \geqslant 1, v_{n+1} = \ln 2 + \frac{1}{2}v_n$.

(c) Déduire les termes généraux de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Le vérifier en calculant de 2 manières u_1 et u_2.

(d) Étudier la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 8

1. Soit u telle que $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant 2u_n$ Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 3 \cdot 2^n$ Étudier la convergence.

2. Soit v positive telle que $v_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}v_n$ Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant 3 \cdot (\frac{1}{2})^n$ Étudier la convergence.

Exercice 9

[**Limite de suite (classique)**]

Soit u de terme général $\dfrac{n!}{a^n}$.

1. **Si 0⩽a⩽1 :**. Déterminer la limite de u.
2. **Si a>1 :** (a) Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 2$. (b) Déduire que si $n \geqslant n_0$ alors : $u_n \geqslant 2^{n-n_0}u_{n_0}$.
   (c) Déduire la limite de u.

Exercice 10

Soit u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$.

1. Étudier le polynôme $P(X) = X^2 - X - 12$ (factorisation, signe, solutions de $P(x) = 0$)
2. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: "u_n est défini et $0 < u_n < 4$"
3. Montrer par récurrence que u est strictement croissante.
   Variante astucieuse : combiner une quantité conjuguée avec la question 1.
4. (a) Déduire que u converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$. (b) Déduire de la question 2 un encadrement de l.
   (c) Montrer que l vérifie $P(l) = 0$. (d) Déduire des questions précédentes la valeur de l.

Exercice 11

1. Calculer la limites des suites suivantes, par la méthode de votre choix.

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n} - 2$ | (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n-2n^3}{n^2+1}$. | (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+3(-1)^n}{2n}$

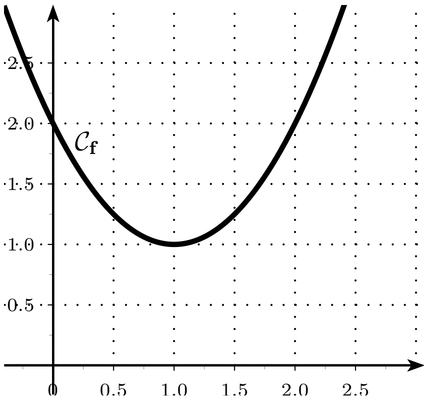
2. Dans ces questions, on veut démontrer "à la main" plusieurs résultats qui sont utilisés dans la pratique :
   (a) On suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

   i. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$ | ii. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$

   (b) Soit $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$. On suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = l + l'$.

Exercice 12

La suite (u_n) est définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$. $f : x \mapsto x^2 - 2x + 2$ est représentée ci-dessous



1. Conjectures graphiques
   (a) **Construire** les points $M_0(u_0; 0)$, $M_1(u_1; 0)$, $M_2(u_2; 0)$, $M_3(u_3; 0)$ et $M_4(u_4; 0)$ sur le graphique ci-dessus (*sans faire de calculs et en laissant apparents les traits de construction*).
   (b) Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sur sa convergence ?
2. Démonstration des conjectures précédentes.
   (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   (b) Donner une expression factorisée de $u_{n+1} - u_n$. En déduire le sens de variation de la suite.
   (c) Montrer que la suite est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 13

Soit f définie par : $f(x) = \ln(x) + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. (a) Etudier les variations de f. (b) Déterminer le signe de $f(x) - x$.
2. Soit u la suite définie par $u_0 > 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$
   (a) Montrer que pour tout entier n : $u_n \geq 1$ et en déduire que la suite est croissante.
   (b) Montrer qu'elle n'est pas majorée est déterminer sa limite.

   On suppose à présent que $u_0 = e$

   (c) Montrer que, pourt tout entier n : $u_{n+1} \geq u_n + 1$, en déduire que $u_n \geq n + e$ et retrouveer la limite de la suite.
3. Soit v définie par $v_0 \in]0, 1[$ et pour tout entier n, $v_{n+1} = f(v_n)$. Montrons que (v_n) n'est pas définie.
   On suppose que (v_n) est définie.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < v_n < 1$.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est strictement décroissante.
   (c) Montrer que (v_n) converge vers un nombre réel $l \in [0\,; 1[$.
   (d) Déterminer l.
   (e) Conclure.

Exercice 14

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$.

1. Quels sont les plus petit et plus grand terme de la somme ? En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leqslant w_n \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+1}$
2. A l'aide de la question précédente, calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} w_n$.

Exercice 15

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k-1}$.

1. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$: $\dfrac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)-1} + \dfrac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)-1} = \dfrac{-2}{(4n+1)(4n+3)}$
   (b) Montrer que la suite v de terme général $v_n = u_{2n}$ est décroissante. *On utilisera le cas particulier de Chasles :* $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n} + \sum_{k=2n+1}^{2n+2}$
2. Montrer de même que la suite w de terme général $w_n = u_{2n+1}$ est croissante. *On utilisera le cas particulier de Chasles :* $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+3} = \sum_{k=1}^{2n+1} + \sum_{k=2n+2}^{2n+3}$.
3. Calculer (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) $w_n - v_n$ puis donner la limite de cette suite.
4. Montrer que v et w convergent vers une même limite l.
   Épilogue : Lorsque $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite l, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l aussi. Nous avons donc démontré dans cette exercice que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 16 (ECRICOME 1999)

Soit (x_n) une suite numérique qui vérifie, pour tout entier naturel n, la relation : $x_{n+2} = \dfrac{1}{3}x_{n+1} + \dfrac{1}{3}x_n$.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ (on donne : $\frac{1+\sqrt{13}}{6} = 0,77$ et $\frac{1-\sqrt{13}}{6} = -0,44$ à 10^{-2} près).
2. Soient $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$. On étudie la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = a$ $u_1 = b$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$ On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et vérifie $u_n \geqslant 1$
   Montrer que la seule limite possible de la suite (u_n) est 4.
3. Soit (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$.
   (a) Montrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$.
   (b) Vérifier, pour tout entier naturel n : $v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1}+v_n}{2(2+v_{n+2})}$. En déduire que : $|v_{n+2}| \leqslant \dfrac{1}{3}\left(|v_{n+1}| + |v_n|\right)$.
   (c) On note (x_n) la suite définie par : $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et, pour tout entier naturel n, $x_{n+2} = \dfrac{1}{3}x_{n+1} + \dfrac{1}{3}x_n$.
   Montrer que, pour tout entier naturel n, $|v_n| \leqslant x_n$ et conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

Exercice 17

1. (a) Soit f la fonction définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x+1}{x}$ et g la composée $g = fof$ définie par $g(x) = f(f(x))$. Etudier les sens de variation sur $\mathbb{R}^+$ de f et de g.
(b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation de $f(x) = x$, puis $g(x) = x$. (On montrera qu'elles ont les mêmes solutions solutions a et b avec $b < 0 < a$, que $b = -1/a$ et que $b = 3 - a$)
Soit u la suite définie par : $u_0 > 0$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$.
2. Montrer que, $\forall n$, $u_n$est défini et $u_n > 0$
3. On suppose dans cette question que $u_0 = 1$. On définit les suites v et w par : $\forall n$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1} = f\left(v_n\right)$.
(a) Montrer que pour tout entier n, $v_{n+1} = g(v_n)$.
(b) Montrer que la suite v et croissante majorée par a. En déduire que v converge vers a.
(c) En déduire que w converge également vers a. Conclure pour u en utilisant le résultat suivant, admis : si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, alors u converge vers cette limite.
4. On pose pour tout entier n, $z_n = \dfrac{u_n - a}{u_n - b}$. (les valeurs a et b étant celles définies précédemment).
On ne suppose plus que $u_0 = 1$ mais seulement que $u_0 > 0$.
(a) Montrer que, pour tout entier n, $z_n$est bien définie et que z est une suite géométrique.
(b) Déterminer la valeur de u_n en fonction de z_n. Déterminer sa limite quand n tend vers l'infini.

Exercice 18 (Critère de d'Alembert)

Soit (u_n) une suite de termes strictement positifs et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que $a \in]1\,;\infty[$ et qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant a$.
   (a) Montrons que pour tout $n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant a^{n-n_0} u_{n_0}$.
   Première façon :
   Si $n = n_0,\ u_{n_0} \geqslant u_{n_0} = a^{n_0-n_0} u_{n_0}$.
   Si $n > n_0$, on a pour tout $k \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} \geqslant a \geqslant 0$, donc $\displaystyle\prod_{k=n_0}^{n-1} \left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) \geqslant \prod_{k=n_0}^{n-1} a$, soit $\dfrac{u_n}{u_{n_0}} \leqslant a^{n-n_0}$.
   Donc $u_n \geqslant a^{n-n_0} u_{n_0}$.
   (b) Montrons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   Comme $a > 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n > 0,$ on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a^{n-n_0} u_{n_0} = +\infty$. Et par comparaison on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   (c) En déduire que la suite (S_n) divergente.
2. On suppose que $a \in]0\,;1[$ et qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant a$.
   (a) Montrer que $u_n \leqslant a^{n-n_0} u_{n_0}$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   (c) On note pour tout $n \geqslant n_0,\ v_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k$
      i. Montrer que la suite (v_n) est majorée par $\dfrac{1}{1-a}$, puis qu'elle converge.
      ii. En déduire que la suite (S_n) est convergente.
   (d) Application :
   Quelle est la nature des suites de termes général :
   $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{n!}$ où $a \in]0\,;1[$. $\qquad v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{n!}$ où $a \in]1\,;+\infty[$.

Exercice 19

Soient (u_n) et (u_n) les suites définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$ $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!n}$. Montrer que ces deux suites ont adjacentes, puis qu'elles convergent.