

Exercice 1

- $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$; $2\sqrt{2} = 2^{\frac{3}{2}}$;
 $\frac{2}{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$
- $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$; $x^{\frac{3}{2}} = x\sqrt{x}$; $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Exercice 2

- $\ln(8) = \ln 2^3 = 3 \ln 2$; $\ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \ln 2$; $\ln 6 - \ln 3 = \ln \frac{6}{3} = \ln 2$; $\ln(2e^2) - 2 = \ln 2 + \ln e^2 - 2 = \ln 2$.
- $\frac{e^{x^2}}{e^{2x}} = e^{x^2-2x}$; $e^{x^2} - (e^x)^2 = e^{x^2} - e^{2x}$; $\frac{e^{x^2+2x}}{e^{(x+1)^2}} = e^{x^2+2x-(x+1)^2} = e^{-1}$;
 $\forall x \in]0; +\infty[$,
 $\frac{\ln(2x)}{\ln x}$ ne peut être simplifiée; $e^{2 \ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$; $\ln(2x) - \ln x = \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \ln 2$; $\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = -2 \ln x$.
- $2^x = e^{x \ln 2}$; $\forall x \in]0; +\infty[$, $x^3 = e^{\ln x^3} = e^{3 \ln x}$; $x^y = e^{\ln x^y} = e^{y \ln x}$.

Exercice 3

- Soit $x > 0$. On a $1 < 3 \Rightarrow x+1 < x+3 \Rightarrow \frac{1}{x+1} > \frac{1}{x+3}$ (la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$) Donc, en appliquant la racine carrée à cette inégalité portant sur des nombres positifs, on obtient bien $\sqrt{\frac{1}{x+1}} > \sqrt{\frac{1}{x+3}}$
- Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} , cela revient à montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $2x+1 \leq (x+1)^2$.
Or, pour tout réel x , on a $(x+1)^2 - (2x+1) = x^2 + 2x + 1 - (2x+1) = x^2 \geq 0$, donc $2x+1 \leq (x+1)^2$.
- (a) La fonction $x \mapsto (1-x)^2 = x^2 - 2x + 1$ est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ (voir sens de variation d'un trinôme). Donc $\forall x \in [2; 4]$, $(1-2)^2 \leq (1-x)^2 \leq (1-4)^2$, soit $\forall x \in [2; 4]$, $1 \leq (1-x)^2 \leq 9$.
Par croissance de la fonction exponentielle, on obtient $e \leq e^{(1-x)^2} \leq e^9$.
- (b) Le tableau de variation de la fonction carrée donne $\forall x \in [-1; 1]$, $0 \leq x^2 \leq 1$
- (c) Soit $x \in]0; 1[$, on pose $f(x) = \frac{1}{\ln(1-x^2)}$. On a $f'(x) = -\frac{(\ln(1-x^2))'}{(\ln(1-x^2))^2}$. Comme le dénominateur est positif, le signe de $f'(x)$ est celui de $-(\ln(1-x^2))' = \frac{2x}{1-x^2}$. Comme $1-x^2 > 0$ sur $]0; 1[$, $f'(x) > 0$.
Donc f est strictement croissante sur $]0; 1[$.

Exercice 4

- $\forall x \in \mathbb{R}$,
 $\ln(1+e^x) = 2 \Leftrightarrow 1+e^x = e^2 \Leftrightarrow e^x = e^2 - 1$
 $\Leftrightarrow x = \ln(e^2 - 1)$.
Donc $S = \{\ln(e^2 - 1)\}$
- $\forall x \in]0; +\infty[$,
 $(1 + \ln x)^2 = 4 \Leftrightarrow (1 + \ln x = -2$
ou $1 + \ln x = 2) \Leftrightarrow (\ln x = -3$ ou $\ln x = 1)$
 $\Leftrightarrow (x = e^{-3}$ ou $x = e)$
Donc $S = \{e^{-3}; e\}$
- $\forall x \in]0; +\infty[$,
 $\sqrt{1 - \ln x} = 2 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 4 \Leftrightarrow \ln x = -3 \Leftrightarrow$
 $x = e^{-3}$.
Donc $S = \{e^{-3}\}$
- $|\ln x| = 1 \Leftrightarrow (\ln x = -1$ ou $\ln x = 1)$
 $\Leftrightarrow (x = e^{-1}$ ou $x = e)$
- Donc $S = \{e^{-1}; e\}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$,
 $|e^x| = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
Donc $S = \{0\}$.
- Pour tout $x \in]0; +\infty[$,
si on pose $X = \ln x$, on a
 $(\ln x)^2 + 3 \ln x + 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 + 3X + 2 = 0$.
Comme $\Delta = 1$, $X^2 + 3X + 2 = 0$ admet deux solutions à savoir
 $X_1 = \frac{-3-1}{2} = -2$ et $X_2 = \frac{-3+1}{2} = -1$.
Donc $S = \{e^{-2}; e^{-1}\}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
En multipliant les deux membres de l'égalité par e^x et en posant $X = e^x$, on a

$$e^x + e^{-x} = 2 \Leftrightarrow (e^x)^2 + 1 = 2e^x \quad x = 0.$$

$$\Leftrightarrow X^2 - 2X + 1 = 0 \Leftrightarrow (X - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow X = 1 \Leftrightarrow \text{Donc } S = \{0\}.$$

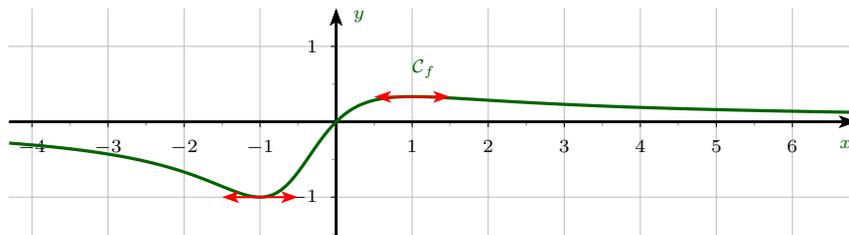
Exercice 5

- $\forall x \in]0; +\infty[$,
 $\ln(2x) \leq 1 \Leftrightarrow 2x \leq e \Leftrightarrow x \leq \frac{e}{2}$.
 Donc $S =]-\infty; \frac{e}{2}]$
- $\forall x \in \mathbb{R}$,
 $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.
 Donc $S = \mathbb{R}^*$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$,
 $e^{3x-1} \leq 1 \Leftrightarrow 3x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$.
 Donc $S =]-\infty; \frac{1}{3}]$
- $\forall x \in \mathbb{R}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}$,
 $\frac{1}{e^x + 1} < 1 \Leftrightarrow 1 < e^x + 1 \Leftrightarrow 0 < e^x$
 Donc $S = \mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$,
 $2^x \leq 3 \Leftrightarrow \ln 2^x \leq \ln 3 \Leftrightarrow x \ln 2 \leq \ln 3$
 $\Leftrightarrow x \leq \frac{\ln 3}{\ln 2}$.
 Donc $S =]-\infty; \frac{\ln 3}{\ln 2}]$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$,
 $3^{2x+1} > 1 \Leftrightarrow 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$.
 Donc $S =]-\frac{1}{2}; +\infty[$.

Exercice 6

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$. On désigne par \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

- $f(x)$ existe si, et seulement si, $x^2 + x + 1 \neq 0$. Or $\Delta < 0$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- f est une fraction, donc dérivable sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. On a $f'(x) = \frac{(x^2 + x + 1) - x(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + x + 1)^2}$.
 elle est strictement croissante sur $[-1; 1]$. De plus f' s'annule en -1 et 1 , donc les tangentes à \mathcal{C}_f au points d'abscisses -1 et 0 sont horizontales. Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à \mathcal{C}_f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Voici l'allure de \mathcal{C}_f :



On a $f(-1) = -1$ et $f(1) = \frac{1}{3}$ donc f n'est ni paire ni impaire.

Exercice 7

- (a) On pose $f_1(x) = e^x - (1 + x)$ et $f_2(x) = e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2})$.
 L'inégalité demandée revient à montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_2(x) \geq 0$.
 En effet, la fonction f_2 est dérivable sur \mathbb{R}_+ et $f_2'(x) = f_1(x) \geq 0$ (par hypothèse).
 Donc f_2 est croissante sur \mathbb{R}_+ , et par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_2(x) \geq f_2(0) = 0$.
 Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$.
- (b) On pose $f_3(x) = e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6})$.
 En utilisant la même méthode, montrons que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$, c'est à dire $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_3(x) \geq 0$.

En effet, la fonction f_3 est dérivable sur \mathbb{R}_+ et $f'_3(x) = f_2(x) \geq 0$ (d'après a)).

Donc f_3 est croissante sur \mathbb{R}_+ , et par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_3(x) \geq f_3(0) = 0$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

(c) Montrons par récurrence que $P(n) : \langle \forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geq 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!} \rangle$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$P(1)$ est vraie d'après l'hypothèse.

Supposons que pour un entier non nul n , $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.

Pour cela on pose $f_n(x) = e^x - (1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!})$.

On a $f_{n+1}(x) = e^x - (1 + x + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!})$.

La fonction f_{n+1} est dérivable sur \mathbb{R}_+ et $f'_{n+1}(x) = f_n(x) \geq 0$ (par hypothèse de récurrence) .

Donc f_{n+1} est croissante sur \mathbb{R}_+ , et par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_{n+1}(x) \geq f_{n+1}(0) = 0$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^x \geq 1 + x + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $e^x \geq 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!}$.

2. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = -\frac{a}{x^2} + \frac{1}{b} = \frac{x^2 - ab}{bx^2}$.

Comme $bx^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $x^2 - ab$, en particulier f' est négative sur $]0; \sqrt{ab}[$ et positive sur $[\sqrt{ab}; +\infty[$. Donc f est décroissante sur $]0; \sqrt{ab}[$ et croissante sur $[\sqrt{ab}; +\infty[$.

Donc $\forall x > 0$, $f(x) \geq f(\sqrt{ab})$. Or $f(\sqrt{ab}) = \frac{a}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{b} = \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{a}{b}}$, soit $\forall x > 0$, $\frac{a}{x} + \frac{x}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Exercice 8

Soit f définie par $f(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- On a

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \\ &= \frac{e^{2x}e^{-x}}{e^{2x}(1 + e^{-x})^2} \\ &= \frac{e^x}{(e^x(1 + e^{-x}))^2} \\ &= \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc f est paire.

3. f est dérivable comme composée de fonctions dérivables et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(1 + e^x)^2 - e^x(2e^x(1 + e^x))}{(1 + e^x)^4} \\ &= \frac{e^x(1 + e^x) - e^x(2e^x)}{(1 + e^x)^3} \text{ (simplification par } 1 + e^x \text{)} \\ &= \frac{e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^3} \text{ (factorisation par } e^x \text{)} \end{aligned}$$

4. Le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - e^x$ car $\frac{e^x}{(1 + e^x)^3} > 0$. Donc f' est positive sur $]-\infty; 0]$ et négative sur $[0; +\infty[$. D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\frac{1}{4}$ 		

5. On a $\forall x \in [0, +\infty[$, $f'(x) \leq 0$ d'après 4). Montrons que $\forall x \in [0, +\infty[$, $-\frac{1}{3} \leq f'(x)$. En effet, pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) + \frac{1}{3} &= \frac{e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^3} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{3e^x(1 - e^x) + (1 + e^x)^3}{3(1 + e^x)^3} \\ &= \frac{e^{3x} + 6e^x + 1}{3(1 + e^x)^3}. \end{aligned}$$

Comme exp est strictement positive sur \mathbb{R} , $f'(x) + \frac{1}{3} \geq 0$.

Donc $\forall x \in [0, +\infty[$, $-\frac{1}{3} \leq f'(x) \leq 0$.

6. Montrons que $\forall x \in [0, +\infty[$, $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{4} \leq f(x)$. On pose, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g(x) = f(x) - (-\frac{1}{3}x + \frac{1}{4})$. On a $\forall x \in [0, +\infty[$, $g'(x) = f'(x) - (-\frac{1}{3}) \geq 0$, d'après 5). Donc g est croissante sur $[0, +\infty[$ et on a $\forall x \in [0, +\infty[$, $g(x) \geq g(0) = 0$. Donc $\forall x \in [0, +\infty[$, $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{4} \leq f(x)$.

Exercice 9

Soit th la fonction définie sur \mathbb{R} par $\text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

1. Montrons que $\text{th}(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$. En effet, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} &= \frac{e^x(e^x - e^{-x})}{e^x(e^x + e^{-x})} \\ &= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \end{aligned}$$

Donc $\text{th}(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

2. Résolvons l'équation $\text{th}(x) = y$ en fonction des valeurs de y .

Tout d'abord, montrons que $\text{th}(x) = y \Rightarrow y \in]-1; 1[$.

En effet ; comme $-e^{2x} - 1 < e^{2x} - 1 < e^{2x} + 1$, en divisant les deux membres de cette inégalité par $e^{2x} + 1$ on obtient $-1 < y < 1$.

Pour tout $y \in]-1; 1[$ on a :

$$\begin{aligned} \text{th}(x) = y &\Leftrightarrow \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = y \\ &\Leftrightarrow e^{2x} - 1 = y(e^{2x} + 1) \\ &\Leftrightarrow e^{2x} - 1 = ye^{2x} + y \\ &\Leftrightarrow e^{2x} - ye^{2x} = 1 + y \\ &\Leftrightarrow e^{2x}(1 - y) = 1 + y \\ &\Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1 + y}{1 - y} \\ &\Leftrightarrow 2x = \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right) \end{aligned}$$

3. D'après 2), $\forall y \in]-1; 1[$, $\exists! x \in \mathbb{R}$, $y = \text{th}(x)$. Donc th réalise une bijection de \mathbb{R} sur $]-1; 1[$.

Exercice 10**1. Étude des fonctions sh et ch**

(a) Les deux fonctions sont définies sur \mathbb{R} .

(b) $\text{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}(x)$ et $\text{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\text{sh}(x)$ La fonction ch est donc paire et la fonction sh est impaire.

(c) On étudie la fonction sh sur \mathbb{R}_+ et on déduira les variations et le signe sur \mathbb{R} par parité.

★ sh est une fonction dérivable sur \mathbb{R} et $\text{sh}'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \text{ch}(x)$. Étant donné que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ alors $\text{sh}'(x) = \text{ch}(x) > 0$. Ce qui veut dire que la fonction sh est strictement croissante.

★ Étudions le signe de la fonction sh.

$\text{sh}(x) \geq 0$ lorsque $e^x \geq e^{-x}$, en appliquant la fonction ln à l'inégalité précédente on trouve que $\text{sh}(x) \geq 0$ lorsque $x \geq -x$ c'est à dire lorsque $x \geq 0$.

Ainsi la fonction sh est positive sur \mathbb{R}_+ .

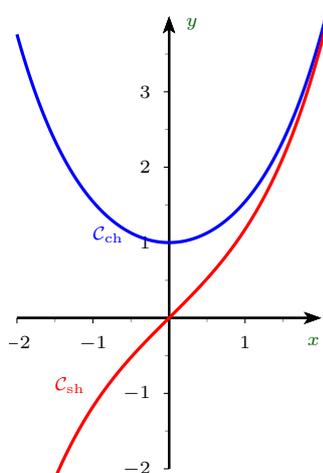
★ Par parité on en déduit que sh est décroissante et négative sur \mathbb{R}_- .

(d) ch est une fonction dérivable sur \mathbb{R} et $\text{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh}(x)$.

Le signe de sh obtenue dans la question précédente permet de conclure La fonction ch est croissante sur \mathbb{R}_+ et décroissante sur \mathbb{R}_- .

(e) Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > e^{-x}$, alors $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh}(x)$.

(f) Les courbes représentatives sont données ci-dessous :



2. (a) La fonction f est définie pour des valeurs n'annulant pas la fonction sh, c'est à dire pour $x \neq 0$. En conclusion la fonction f est définie sur \mathbb{R}^* .

Pour $x \neq 0$

$$f(-x) = \frac{-x}{\text{sh}(-x)} = \frac{-x}{-\text{sh}(x)} = \frac{x}{\text{sh}(x)} = f(x)$$

La fonction f est donc paire.

(b) La fonction g est bien dérivable sur \mathbb{R}^+ et $g'(x) = \text{ch}(x) - x \text{sh}(x) - \text{ch}(x) = -x \text{sh}(x)$. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \text{sh}(x)$ sont positives sur \mathbb{R}_+ ce qui veut dire que g est strictement décroissante.

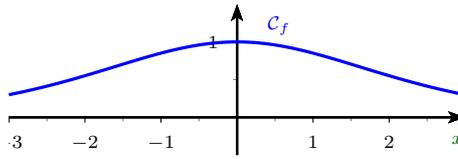
Si $x \geq 0$ alors $g(x) \leq 0$ mais $g(0) = 0$ soit $g(x) \leq 0$.

(c) La fonction f est paire, on va donc l'étudier sur \mathbb{R}_+^* , où elle est une fonction dérivable.

$$f'(x) = \frac{\text{sh}(x) - x \text{ch}(x)}{(\text{sh}(x))^2} = \frac{g(x)}{(\text{sh}(x))^2}$$

De la question précédente, on peut déduire que $f'(x) \leq 0$. La fonction f est donc décroissante sur \mathbb{R}_+^* et par parité on peut déduire que f est croissante \mathbb{R}_-^* .

(d) La courbe représentative de f est ci-dessous



3. Quelques formules

$$(a) \text{ Soit } x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}}{4} + \frac{2e^x e^{-x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}}{4} + \frac{2e^x e^{-x}}{4} - \frac{e^{-2x}}{4} = \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{e^0}{2} + \frac{e^0}{2} = 1$$

$$(b) (\operatorname{ch}(x))^2 = \frac{e^{2x}}{4} + \frac{2e^x e^{-x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{ch}(2x))$$

$$(c) (\operatorname{sh}(x))^2 = \frac{e^{2x}}{4} - \frac{2e^x e^{-x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (\operatorname{ch}(2x) - 1)$$