

Exercice 1. Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Peut-on écrire :

- a) $a \in E$ b) $a \subset E$ c) $\{a\} \subset E$
 d) $\emptyset \in E$ e) $\emptyset \subset E$ f) $\{\emptyset\} \subset E$?

Exercice 2. Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Etablir

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Exercice 3. Etant donné A et B deux parties de E , justifier

$$\overline{A \setminus B} = B \setminus A$$

Exercice 4. Etant donné A, B et C trois parties de E , justifier les équivalences suivantes :

- a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
 b) $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$.
 c) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$
 d) $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \Leftrightarrow B = C$

Exercice 5. Soient a, b et c trois réels tels que $c \neq 0$ et $a^2 + bc \neq 0$.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{a/c\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{a/c\}$ définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$.

Justifier que l'application f est bien définie.

Calculer $f \circ f$, en déduire que f est une application bijective dont on déterminera l'application réciproque.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est bien définie et bijective.

Exercice 7. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. Etablir les implications suivantes :

- a) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.
 b) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective
 c) $g \circ f$ injective et f surjective $\Rightarrow g$ injective.
 d) $g \circ f$ surjective et g injective $\Rightarrow f$ surjective.

Exercice 8. Décrire l'image directe de \mathbb{R} par la fonction exponentielle.

Déterminer de quels intervalles, l'intervalle $[2, 7]$ est l'image par la fonction carrée.

Exercice 9. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intervalle image J de I par f puis vérifier que f réalise une bijection de I sur J puis préciser f^{-1}

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3, I =]-\infty, 2]$.
2. $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}, I =]-2, +\infty]$.
3. $f(x) = \sqrt{2x+3} - 1, I = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right]$.
4. $f(x) = \frac{x}{1+|x|}, I = \mathbb{R}$.