Exercice 1. *On peut écrire : a), c), e).*

Exercice 2.

$$\begin{aligned} A\backslash(B\cap C) &= A\cap\overline{B\cap C} \\ &= A\cap(\overline{B}\cup\overline{C}) \\ &= (A\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C}) \\ &= (A\backslash B)\cup(A\backslash C) \end{aligned}$$

Exercice 3.

$$\begin{aligned} \overline{A}\backslash\overline{B} &= \overline{A}\cap\overline{\overline{B}} \\ &= \overline{A}\cap B \\ &= B\cap\overline{A} \\ &= B\backslash A \end{aligned}$$

Exercice 4. *a) (⇒) Supposons $A\subset B$.*
On a toujours $B\subset A\cup B$. De plus

$$\begin{aligned} x\in A\cup B &\Rightarrow x\in A \text{ ou } x\in B \\ &\Rightarrow x\in B (\text{car } A\subset B) \end{aligned}$$

Donc $A\cup B\subset B$. Ainsi $A\cup B=B$.
(⇐) Supposons $A\cup B=B$. Puisque $A\subset A\cup B$, on a $A\subset B$.
b) (⇒) Supposons $A=B$. On a $A\cap B=A=A\cup B$.
(⇐) Supposons $A\cap B=A\cup B$. On a $A\subset A\cup B=A\cap B\subset B$ et de même $B\subset A$ donc $A=B$.
c) (⇒) Supposons $A\cup B=A\cap C$. On a $B\subset A\cup B=A\cap C\subset A\subset A\cup B=A\cap C\subset C$.
(⇐) Supposons $B\subset A\subset C$. Alors $A\cup B=A=A\cap C$.
d) (⇒) Supposons $A\cup B=A\cup C$ et $A\cap B=A\cap C$. On a $B\subset A\cup B=A\cup C$, donc $B=B\cap(A\cup C)=(A\cap B)\cup(B\cap C)=(A\cap C)\cup(B\cap C)=C\cap(A\cup B)=C\cap(A\cup C)=C$.
Donc $B=C$.
(⇐)Si $B=C$ on a clairement $A\cup B=A\cup C$ et $A\cap B=A\cap C$.

Exercice 5. *1. f est bien définie sur $\mathbb{R}\backslash\{a/c\}$ car le dénominateur ne s'y annule pas.*

$$\begin{aligned} f(x)=\frac{a}{c} &\Leftrightarrow (ax+b)c=a(cx-a) \\ &\Leftrightarrow a^2+bc=0 \end{aligned}$$

qui est exclu, donc f est à valeurs dans $\mathbb{R}\backslash\{a/c\}$.

2. On a pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{a/c\}$:

$$\begin{aligned} (f\circ f)(x) &= \frac{af(x)+b}{cf(x)-a} \\ &= \frac{a\frac{ax+b}{cx-a}+b}{c\frac{ax+b}{cx-a}-a} \\ &= \frac{a(ax+b)+b(cx-a)}{c(ax+b)-a(cx-a)} \\ &= \frac{(a^2+bc)x}{a^2+bc} \\ &= x \end{aligned}$$

Puisque $f\circ f=Id$, f est une bijection et $f^{-1}=f$

Exercice 6. *Soit $n \in N$. Si n est pair alors $f(n) = \dfrac{n}{2} \in \mathbb{N}$*

et si n est impair alors $\dfrac{n+1}{2} \in \mathbb{N}$.

Dans les deux cas $f(n) \in \mathbb{Z}$. Soit $(n, n') \in \mathbb{N}^2$. Supposons $f(n) = f(n')$.

Compte tenu de la remarque précédente, n et n' ont nécessairement même parité.

Si n et n' sont pairs alors $\dfrac{n}{2} = \dfrac{n'}{2}$ donc $n = n'$.

Si n et n' sont impairs alors $-\dfrac{n+1}{2} = -\dfrac{n'+1}{2}$ donc $n = n'$.

Ainsi f est injective.

Soit $m \in \mathbb{Z}$. Si $m \geqslant 0$ alors pour $n = 2m \in \mathbb{N}$ on a $f(n) = \dfrac{2m}{2} = m$.

Si $m < 0$ alors pour $n = -2m - 1 \in \mathbb{N}$ on a $f(n) = \dfrac{2m}{2} = m$.

Ainsi f est surjective.

Finalement f est bijective.

Exercice 7. *a) Supposons $g \circ f$ injective. Soient $(x, x') \in E^2$.*

Si $f(x) = f(x')$ alors $g(f(x)) = g(f(x'))$. Or $g \circ f$ est injective, donc $x = x'$.

Ainsi f injective.

b) Supposons $g \circ f$ surjective.

Soit $z \in G$. Il existe $x \in E$ tel que $z = g(f(x))$. Pour $y = f(x) \in F$, on a $g(y) = z$. Ainsi g surjective.

c) Supposons $g \circ f$ injective et f surjective.

Soit $(y,\ y') \in F^2$, tel que $g(y) = g(y')$. Montrons que $y = y'$. En effet, comme f est surjective $\exists (x,\ x') \in E^2$ tel que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. On alors $g(f(x)) = g(f(x'))$. Or $g \circ f$ est injective, d'où $x = x'$. Donc $f(x) = f(x')$, soit $y = y'$. Donc g est injective.

d) Supposons $g \circ f$ surjective et g injective. Soit $y \in F$. Montrons qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

En effet, comme $g(y) \in G$ et $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $g(y) = g \circ f(x) = g(f(x))$. Or g est injective, d'où $y = f(x)$.

Exercice 8. *1. $exp(\mathbb{R}) =]0\,;+\infty[$.*

2. L'intervalle $[2, 7]$ est l'image par la fonction carrée des intervalles $[-\sqrt{7}\,; -\sqrt{2}]$ et $[\sqrt{2}\,; \sqrt{7}]$

Exercice 9. *1. f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;2]$ (voir trinôme chapitre 1). Donc f réalise une bijection de $]-\infty\,;2]$ sur $f(]-\infty\,;2]) = [-1\,;+\infty[= J$. Soit $y \in J$, déterminons $f^{-1}(y)$ c'est à dire $x \in]-\infty\,;2]$ tel que $f(x) = y$.*
On a :

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - y = 0$$

$\Delta = 16 - 4(3 - y) = 4(1 + y) \geqslant 0$ car $y \in J$. Comme $x \in I$, on a $x = \dfrac{4 - \sqrt{\Delta}}{2} = 2 - \sqrt{1 + y}$. Donc $f^{-1}(y) = 2 - \sqrt{1 + y}$. Finalement f^{-1} est l'application définie sur J par $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{1 + x}$.

2. f est continue et strictement croissante sur I car f est une fraction et $f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2}$. Donc f réalise une bijection de I sur $f(I) =]-\infty\,;2[= J$ (faites un tableau de variations pour illustrer cela).
Soit $y \in J$, déterminons $f^{-1}(y)$ c'est à dire $x \in I$ tel que $f(x) = y$.
On a :

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow y = \frac{2x-1}{x+2} \\ &\Leftrightarrow y(x+2) = (2x-1) \\ &\Leftrightarrow 2y + 1 = 2x - xy \\ &\Leftrightarrow 2y + 1 = x(-y+2) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{-y+2} \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(y) = \dfrac{2y+1}{-y+2}$. *Finalement* f^{-1} *est l'application définie sur* J *par* $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{-x+2}$.

3. *f est continue et strictement croissante sur I par composition de fonctions croissantes ou par dérivation. Donc f réalise une bijection de I sur $f(I) = [-1\,;+\infty[= J$. On a :*

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow y = \sqrt{2x+3} - 1 \\ &\Leftrightarrow y + 1 = \sqrt{2x+3} \\ &\Leftrightarrow (y+1)^2 = 2x+3 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{(y+1)^2 - 3}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2} + y - 1 \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(y) = \dfrac{y^2}{2} + y - 1$. *Finalement* f^{-1} *est l'application définie sur* J *par* $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - 1$.

4. *Sur $]-\infty\,;0]$, $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ et sur $]0\,;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$. Comme dans 2), on montre que f est continue, strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et $f(]-\infty\,;0]) =]-1\,;0]$. Donc $\forall y \in]-1\,;0]$, $\exists! x \in]-\infty\,;0]$, $f(x) = y$. De même f est continue, strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et $f(]0\,;+\infty[) =]0\,;1[$. Donc $\forall y \in]0\,;1[$, $\exists! x \in]0\,;+\infty[$, $f(x) = y$. On pose $J =]-1\,;1[$.*
   Montrons que $\forall y \in J$, $\exists! x \in I$, $f(x) = y$.
   En effet, si $y \in]-1\,;0]$, l'égalité $f(x) = y$ impose à x d'être dans $]-\infty\,;0]$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow y = \frac{x}{1-x} \\ &\Leftrightarrow y(1-x) = x \\ &\Leftrightarrow y = xy + x \\ &\Leftrightarrow y = x(y+1) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y}{y+1} \end{aligned}$$

   Si $y \in]0\,;1[$, l'égalité $f(x) = y$ impose à x d'être dans $]0\,;+\infty[$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow y = \frac{x}{1+x} \\ &\Leftrightarrow y(1+x) = x \\ &\Leftrightarrow y = -xy + x \\ &\Leftrightarrow y = x(-y+1) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y}{-y+1} \end{aligned}$$

   Dans les deux cas on a $x = \dfrac{y}{-|y|+1}$. Donc f réalise une bijection de I sur J et $\forall x \in J$, $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{-|x|+1}$.