Exercice 1

Soient A, B et C trois matrices à coefficients réels définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $3A$ et $B - 2C$.
2. Calculer AB et AC. Que remarque-t-on ?

Exercice 2

Soient A, B et C trois matrices à coefficients réels définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculer AB, BA, AC et CA. Que remarque peut-on remarquer ?

Exercice 3

Soient A, B, C et D quatre matrices à coefficients réels définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier par le calcul que $(A + D)C = AC + DC$.
2. Vérifier par le calcul que $(AB)C = A(BC)$.
3. Calculer ${}^tC\,{}^tA$ et vérifier que ${}^t(AC) = {}^tC\,{}^tA$.

Exercice 4

Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2 et montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_3$. En déduire que la matrice A est invesible et calculer A^{-1}.

Exercice 5

Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2 et montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_4$. En déduire que la matrice A est invesible et calculer A^{-1}.

Exercice 6

Soit M la matrice définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit J la matrice définie par $J = M - I_3$.

1. Calculer J, J^2 et J^3.
   En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, J^k
2. A l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 7

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Calculer PQ. Qu'est-ce qu'on peut en déduire ?
2. Vérifier que $A = PDQ$.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nQ$.
4. Expliciter A^n.

Exercice 8

Déterminer l'inverse des matrices suivantes, quand cette matrice inverse existe :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9

On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que A est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $A^3 - 4A^2 - 6A$. En déduire une expression de A^{-1} en fonction de A et de I_3.

Exercice 10

Soit α un réel donnée. On donne :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrices A est-elles inversible ? Dans ce cas, calculer son inverse.
2. Retrouver le résultat de 1) en déterminant deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_3$.

Exercice 11

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B carrées d'ordre 2 telles que $AB = BA$.
2. Déterminer toutes les matrices diagonales M d'ordr 2 telles que $M^2 - M - 2I_2 = 0$.

Exercice 12

1. Soient A et B deux matrices carrées non nulles telles que $AB = 0$. Montrer que A et B ne sont pas inversibles.
2. Soit A une matrice carrée non nulle. Supposons qu'il existe un entier naturel non nul n tel que $A^n = 0$. Montrer que A n' est pas inversible.

Exercice 13

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et A et B de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ et $B^2 = B$.

1. On suppose que l'on a $AB = -BA$. Montrer que $AB = -ABA$ puis $AB = BA$.
   En déduire les égalités $AB = BA = 0$
2. Démontrer l'équivalence suivante : $(A + B)^2 = A + B \Leftrightarrow AB = BA = 0$

Exercice 14

Soit la matrice :

$$\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation : $X^2 = A$

Exercice 15

Déterminer toutes matrices diagonales X d'ordre 3 vérifiant l'équation :

$$X^2 - X - 2I = 0.$$

Exercice 16

Soit A une matrice carrée d'odre $n \in \mathbb{N}^*$. On supose qu'il existe un entier p tel $A^p = 0$.

Calculer $(I - A)(I + A + \cdots + A^{p-1})$. En déduire que $I - A$ est inversible puis calculer son inverse.

Exercice 17

Soient (a_n) et (b_n) deux suites définies par $a_0 = 2$, $b_0 = 0$ et les relations suivantes. $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases}$

Les questions 2, 3 et 4 permettent de déterminer le terme général de ces suites de 3 manières indépendantes.

1. Calculer a_1, b_1, a_2 et b_2
2. **Méthode 1 :**
   (a) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $s_n = a_n + b_n$. Montrer que (s_n) est géométrique et déterminer son terme général.
   (b) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d_n = a_n - b_n$. Montrer que (d_n) est constante et déterminer son terme général.
   (c) Déduire en résolvant un système les termes généraux de (a_n) et (b_n).
3. **Méthode 2 :**
   (a) En combinant les relations (1) et (2) montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$
   (b) Déterminer le terme général de (a_n).
   (c) Déduire celui de (b_n) à l'aide de la relation de récurrence (1)
4. **Méthode 3 :**
   (a) Soit X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$

(b) On définit la suite (α_n) par $\alpha_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+1} = 3\alpha_n + 1$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n + 1 & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_n + 1 \end{pmatrix}$

(c) Déterminer le terme général de (α_n)

(d) Déduire les termes généraux de (a_n) et (b_n)

Exercice 18

Soit u définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Soit $D = P^{-1}AP$. Déterminer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}A^nP$ et déduire une expression de A^n.
4. Soit $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$
5. Déduire une expression de X_n en fonction de A^n et X_0. Puis déduire le terme général de u.

Exercice 19 (EML 2003)

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre trois et on considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et A^3, puis vérifier : $A^3 = A^2 + 2A$.
2. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, il existe un couple (a_n, b_n) de nombres réels tel que :
   $A^n = a_nA + b_nA^2$, et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
3. (a) Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$.
   (b) En déduire a_n et b_n en fonction de n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
   (c) Donner l'expression de A^n en fonction de A, A^2 et n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Exercice 20

[**Suites et matrices**]

On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Démontrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1 - 2u_n & 2u_n \\ u_n & -u_n & 1 + u_n \end{pmatrix}$.
2. Calculer u_n en fonction de n puis expliciter A^n.

Exercice 21 (ECRICOME T 2007)

On se propose de déterminer la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence : $\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+2} & = & 5u_{n+1}-6u_n \\ u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 1 \end{array}\right.$ *sans utiliser* les résultats du cours sur les suites récurrentes doubles. On définit la matrice A par : $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calcul de la puissance n-ème de A

On considère les matrices à coefficients réels B et C définies par : $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

1. Calculer BC et CB et B^2. Qu'en déduire pour $B^n, n \in \mathbb{N}^*$?
2. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul : $C^n = (-1)^{n-1}C$
3. Vérifier que l'on a : $A^2 = 5A - 6I$, où I est la matrice carrée unité d'ordre 2.
4. Etablir que la matrice A est-inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I.
5. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n : $A^n = 3^nB - 2^nC$
6. La relation précédente est-elle encore vraie pour $n = -1$. C'est-à-dire a-t-on : $A^{-1} = \frac{1}{3}B - \frac{1}{2}C$?
7. Montrer que pour tout entier naturel n : $\left(A^{-1}\right)^n = \frac{1}{3^n}B - \frac{1}{2^n}C$

Expression de u_n en fonction de n

1. Vérifier que pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. Donner ainsi l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 22

Système linéaire de deux suites récurrentes : on note A, P, D les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On définit les suites (x_n) et (y_n) par : $\left\{\begin{array}{l} x_0 = 0, \quad y_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = 5x_n + y_n \\ y_{n+1} = -4x_n \end{array}\right. \end{array}\right.$ et on pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}. Vérifier que l'on a $D = P^{-1}AP$.
2. Donner, sans démonstration, l'expression de D^n pour n entier naturel.
3. Exprimer A en fonction de P, P^{-1} et D, puis montrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$ En déduire l'écriture matricielle de A^n en fonction de n.
4. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$.
5. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_n = A^nU_0$. En déduire l'expression de x_n et y_n en fonction de n.

Puissance d'une matrice : Soient B et I_3 les matrices suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $B^2 = 5B - 4I_3$.
2. Pour n entier naturel on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$: « il existe deux réels a_n et b_n tels que $B^n = a_nB + b_nI_3$ ».
   (a) Montrer que $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$ sont vraies et déterminer les couples (a_0, b_0), (a_1, b_1), et (a_2, b_2).
   (b) On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   (c) Utiliser la première partie de l'exercice pour exprimer a_n et b_n en fonction de n.
   (d) Conclure en donnant l'écriture matricielle de B^n.