Exercice 1

1. $3A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ -6 & 3 & 9 \\ 12 & 9 & -3 \end{pmatrix}$, $\quad B-2C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$
2. $AB = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 & 7 \\ 3 & -13 & 0 & 7 \\ 9 & 21 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $AC = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 & 7 \\ 3 & -13 & 0 & 7 \\ 9 & 21 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   On peut remarque que $A * B = AC$ et pourtant $B \neq C$. C'est pour cela qu'il faut être vigilant avec le calcul matriciel.

Exercice 2

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et pourtant ni A ni B est la matrice nulle.

Exercice 3

1. $A + D = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 7 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ et $(A+D)C = \begin{pmatrix} 22 & 10 & -8 & -2 \\ 6 & 3 & -7 & -37 \end{pmatrix}$.
   D'autre part $AC = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 14 & 5 \\ 19 & 9 & -8 & -21 \end{pmatrix}$et $DC = \begin{pmatrix} 18 & 6 & -22 & -7 \\ -13 & -6 & 1 & -16 \end{pmatrix}$.
   D'où $AC + DC = \begin{pmatrix} 22 & 10 & -8 & -2 \\ 6 & 3 & -7 & -37 \end{pmatrix}$.
2. $AB = \begin{pmatrix} -14 & 4 & 13 \\ 15 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ donc $(AB)C = \begin{pmatrix} 69 & 21 & -94 & -7 \\ -7 & 2 & 29 & -43 \end{pmatrix}$.
   D'autre part $BC = \begin{pmatrix} 11 & 5 & -6 & -12 \\ 7 & 1 & -16 & 5 \\ -13 & -4 & 17 & -1 \end{pmatrix}$ donc $A(BC) = \begin{pmatrix} 69 & 21 & -94 & -7 \\ -7 & 2 & 29 & -43 \end{pmatrix} = (AB)C$
3. On transpose les lignes et les colonnes pour obtenir ${}^tC = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ donc
   ${}^tC \times {}^tA = \begin{pmatrix} 4 & 19 \\ 4 & 9 \\ 14 & -8 \\ 5 & -21 \end{pmatrix}$. D'autre part $AC = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 14 & 5 \\ 19 & 9 & -8 & -21 \end{pmatrix}$ donc ${}^t(AC) = \begin{pmatrix} 4 & 19 \\ 4 & 9 \\ 14 & -8 \\ 5 & -21 \end{pmatrix} =$
   ${}^tC \times {}^tA$.

Exercice 4

$A^2 = \begin{pmatrix} 18 & 9 & 9 \\ 9 & 18 & 9 \\ 9 & 9 & 18 \end{pmatrix}$ ainsi $A^2 = \alpha A + \beta I_3$ s'écrit $\begin{pmatrix} 18 & 9 & 9 \\ 9 & 18 & 9 \\ 9 & 9 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha+\beta & \alpha & \alpha \\ \alpha & 4\alpha+\beta & \alpha \\ \alpha & \alpha & 4\alpha+\beta \end{pmatrix}$ On trouve alors $\alpha = 9$ et $\beta = -18$ par identification.

$A^2 - 9A = -18I_3$ ce qui peut s'écrire $A \times \left(-\frac{1}{18}A + \frac{1}{2}I_3\right) = \left(-\frac{1}{18}A + \frac{1}{2}I_3\right) \times A = I_3$. Ainsi A est inversible d'inverse $-\frac{1}{18}A + \frac{1}{2}I_3$.

Exercice 5

La méthode est la même que dans l'exercice précédent :
$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $\alpha = 2$ et $\beta = 3$. On obtient

$$A^{-1} = \frac{1}{3}A - \frac{2}{3}I_4 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Exercice 6

1. $J = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   On en déduit que pour tout $k \geqslant 3$, $J^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. La formule du binà´me de Newton donne

$$M^n = (J + I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} J^k I_3^{n-k}$$

   or $J^k = 0$ dès que $k \geqslant 3$ et $I_3^{n-k} = I_3$ pour $k \geqslant 0$ donc

$$M^n = (J + I_3)^n = \sum_{k=0}^{2} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} J^k I_3 = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} J^0 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} J^1 + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} J^2$$

$$M^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3n & 3n^2 - n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7

1. $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit que Q est l'inverse de P.

2. $P \times D = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 4 & -6 & 8 \\ -4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ ainsi

$$PDQ = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 4 & -6 & 8 \\ -4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} = A$$

3. Pour être rigoureux on peut le montrer par récurrence.
   Initialisation : Si $n = 0$ $A^0 = I_3$ et $PD^0Q = P \times I_3 \times Q = I_3$. La propriété est vraie pour $n = 0$.
   hérédité : Si pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nQ$ on peut écrire que

$$A^{n+1} = A \times A^n.$$

   Par hypothèse de récurrence on peut écrire

$$A^{n+1} = A \times PD^nQ = PDQPD^nQ$$

or $PQ = I_3$ donc
$$A^{n+1} = PDD^nQ = PD^{n+1}Q$$
On a montré à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n $A^n = PD^nQ$.

4. $P \times D^n = \begin{pmatrix} 4^m & 6^m & 8^m \\ 4^m & -6^m & 8^m \\ -4^m & 6^m & 8^m \end{pmatrix}$ d'où
$$A^n = PD^nQ = \begin{pmatrix} \dfrac{4^m+6^m}{2} & \dfrac{-6^m+8^m}{2} & \dfrac{-4^m+8^m}{2} \\ \dfrac{4^m-6^m}{2} & \dfrac{6^m+8^m}{2} & \dfrac{-4^m+8^m}{2} \\ \dfrac{-4^m+6^m}{2} & \dfrac{-6^m+8^m}{2} & \dfrac{4^m+8^m}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 8

- Montrons que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ est inversible et calculons son inverse.

La matrice augmentée est la matrice
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Alors

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow \dfrac{L_2}{-4} \\ L_3 \leftarrow \dfrac{L_3}{-3} \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow -2L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{6} & \frac{3}{2} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Ainsi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{13}{6} & \frac{3}{2} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

- Montrons que la matrice B n'est pas inversible.

$$L_1 \leftarrow \frac{L_1}{4} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow \frac{2L_2}{3} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow L_3 + 3L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Les coefficients diagonaux de la partie gauche de la matrice augmentée ont un produit nul, B n'est pas inversible.

- Montrons C est inversible et calculons son inverse.

Avec des opérations sur la matrice augmentée associée à C on trouve que

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 9

1. Par méthode de pivot de Gauss, on montre que A est inversible et que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. $A^3 = \begin{pmatrix} 31 & 78 & 52 \\ 26 & 65 & 44 \\ 26 & 66 & 43 \end{pmatrix}$ et $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 10 \\ 5 & 13 & 8 \\ 5 & 12 & 9 \end{pmatrix}$ on trouve alors $A^3 - 4A^2 - 6A = I_3$.
   $A(A^2 - 4A - 6I_3) = (A^2 - 4A - 6I_3)A = I_3$, l'inverse de A est $A^2 - 4A - 6I_3$.

Exercice 10

1. $$L_1 \leftrightarrow L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   On a choisi de permuter les lignes L_1 et L_3 afin d'éviter les opérations qui peuvent ne pas être définies comme diviser pas α sans savoir si $\alpha \neq 0$.

   $$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \alpha L_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & 1 - \alpha & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 - \alpha & 1 - \alpha^2 & 1 & 0 & -\alpha \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-\alpha-\alpha^2 & 1 & 1 & -\alpha-1 \end{array}\right)$$

On a $2-\alpha-\alpha^2 = -(\alpha-1)(\alpha+2)$.
Si $\alpha=-2$ ou $\alpha=1$, la matrice n'est pas inversible car au moins un élément sur la diagonale est nul.
Si $\alpha \neq -2$ et $\alpha \neq 1$ on poursuit,

$$\begin{array}{c} L_2 \leftarrow \dfrac{L_2}{\alpha-1} \\ L_3 \leftarrow \dfrac{L_3}{2-\alpha-\alpha^2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dfrac{1}{\alpha-1} & -\dfrac{1}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{1}{\alpha^2+\alpha-2} & -\dfrac{1}{\alpha^2+\alpha-2} & -\dfrac{\alpha+1}{\alpha^2+\alpha-2} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - \alpha L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \dfrac{\alpha}{\alpha^2+\alpha-2} & \dfrac{\alpha}{\alpha^2+\alpha-2} & -\dfrac{2}{\alpha^2+\alpha-2} \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{1}{\alpha^2+\alpha-2} & \dfrac{\alpha+1}{\alpha^2+\alpha-2} & -\dfrac{1}{\alpha^2+\alpha-2} \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{1}{\alpha^2+\alpha-2} & -\dfrac{1}{\alpha^2+\alpha-2} & \dfrac{\alpha+1}{\alpha^2+\alpha-2} \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dfrac{\alpha+1}{\alpha^2+\alpha-2} & -\dfrac{1}{\alpha^2+\alpha-2} & -\dfrac{1}{\alpha^2+\alpha-2} \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{1}{\alpha^2+\alpha-2} & \dfrac{\alpha+1}{\alpha^2+\alpha-2} & -\dfrac{1}{\alpha^2+\alpha-2} \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{1}{\alpha^2+\alpha-2} & -\dfrac{1}{\alpha^2+\alpha-2} & \dfrac{\alpha+1}{\alpha^2+\alpha-2} \end{array}\right)$$

Donc, dans ce cas, $A^{-1} = \dfrac{1}{\alpha^2+\alpha-2}\begin{pmatrix} \alpha+1 & -1 & -1 \\ -1 & \alpha+1 & -1 \\ -1 & -1 & \alpha+1 \end{pmatrix}$.

2. On a $A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2+2 & 2\alpha+1 & 2\alpha+1 \\ 2\alpha+1 & \alpha^2+2 & 2\alpha+1 \\ 2\alpha+1 & 2\alpha+1 & \alpha^2+2 \end{pmatrix}$. et $aA+bI_3 = \begin{pmatrix} a\alpha+b & a & a \\ a & a\alpha+b & a \\ a & a & a\alpha+b \end{pmatrix}$.
   $A^2 = aA+bI_3 \Leftrightarrow (a=2\alpha+1 \text{ et } a\alpha+b=\alpha^2+2) \Leftrightarrow (a=2\alpha+1 \text{ et } b=\alpha^2+2-a\alpha)$. Donc $a=2\alpha+1$ et $b=-\alpha^2-\alpha+2$.
   On a $A^2 = aA+bI_3 \Leftrightarrow A(A-aI_3)=bI_3$.
   Si $b=0$ c'est à dire, $\alpha=-2$ ou $\alpha=1$, montrons par l'absurde que A n'est pas inversible.
   Supposons que A est inversible. L'égalité ci-dessus deviendrait, en multipliant à gauche ces deux membres par $A^(-1)$, $A-aI_3=0$. Ceci est absurde, car $A \neq aI_3$.
   Si $b \neq 0$ c'est à dire, $\alpha \neq -2$ et $\alpha \neq 1$ on a $A(A-aI_3)=bI_3 \Leftrightarrow A(\dfrac{A-aI_3}{b})=I_3$. Dans ce cas la matrice A est inversible d'inverse $\dfrac{A-aI_3}{b}$. En remplaçant a par $2\alpha+1$ et b par $-\alpha^2-\alpha+2$ on obtient
   $A^{-1} = \dfrac{1}{\alpha^2+\alpha-2}\begin{pmatrix} \alpha+1 & -1 & -1 \\ -1 & \alpha+1 & -1 \\ -1 & -1 & \alpha+1 \end{pmatrix}$.

Exercice 11

Si on pose $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ où x, y, z et t sont quatre réels.

On cherche à trouver ces 4 réels tels que

$$\begin{pmatrix} x+2z & 2t+y \\ 3x+4z & 4t+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ 3t+z & 4t+2z \end{pmatrix}$$

Ce qui donne $\begin{cases} x = t-z \\ y = \dfrac{2}{3}z \end{cases}$.

Les matrices cherchées ont pour forme $B = \begin{pmatrix} t-z & \dfrac{2}{3}z \\ z & t \end{pmatrix}$ pour z et t réels.

Exercice 12

1. Supposons par l'absurde que A ou B est inversible. Par exemple A.
   $AB = 0$ implique que $A^{-1}AB = A^{-1}0$ soit $B = 0$, absurde.
2. Supposons qu'il existe un entier naturel non nul n tel que $A^n = 0$, montrons par l'absurde que A n'est pas inversible. En effet, supposons par l'absurde que A est inversible. On aurait A^n est inversible d'inverse $(A^{-1})^n$, mais $A^n = 0$, donc 0 est inversible ce qui absurde.

Exercice 13

1. $AB = -BA$ alors $AAB = A(-BA)$ donc $A^2B = -ABA$ soit $AB = -ABA$.
   De plus $BA = -AB$ alors $BAA = -ABA$ donc $BA = -ABA$. En résumé $AB = BA$.
   $AB = -BA$ et $AB = BA$ entraine $AB = BA = 0$.
2. $(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2 = A+AB+BA+B$. Ce qui veut dire que $(A+B)^2 = A+B \Leftrightarrow AB+BA = 0$ soit $(A+B)^2 = A+B \Leftrightarrow AB = BA = 0$ d'après la question précédente.

Exercice 14

Soit la matrice :

$$\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Résolvons dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation : $X^2 = A$

On pose $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

$X^2 = A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2+yz & xy+yt \\ xz+tz & yz+t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x^2+yz = yz+t^2 = -5,\ xy+yt = -6$ et $xz+tz = 4$

$x^2 = t^2$ et $x^2+yz = -5 \Leftrightarrow t = -x$ ou $t = x$

$t = -x$ est impossible car dans ce cas $-6 = xy+ty = xy+y(-x) = 0$, impossible.

Donc $X^2 = A \Leftrightarrow (t = x,\ x^2+yz = -5,\ 2xy = -6 \textit{ et } 2xz = 4) \Leftrightarrow (t = x,\ x^2+yz = -5,\ xy = -3 \textit{ et } xz = 2 \Leftrightarrow$ $(t = x,\ x^2+yz = -5,\ y = -\dfrac{3}{x} \textit{ et } z = \dfrac{2}{x}$

$x^2 - \dfrac{6}{x^2} = -5$

$x^4 + 5x^2 - 6 = 0$

$x^2 = 1$ ou $x^2 = -6$ or $x^2 \geqslant 0$ d'où $x = -1$ ou $x = 1$

$X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ou $X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $X^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 15

Déterminer toutes matrices diagonales X d'ordre 3 vérifiant l'équation :

$$X^2 - X - 2I = 0.$$

On pose $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 16

$(I + A + \cdots + A^{p-1})(I - A) = (I - A)(I + A + \cdots + A^{p-1}) = I + A + ... + A^{p-1} - (A + A^2 + ... + A^p) = I - A^p$

Or $A^p = 0$, donc $I - A$ est inversible et son inverse est $I + A + \cdots + A^{p-1}$.

Exercice 17

[Différentes méthodes]

Soient (a_n) et (b_n) deux suites définies par $a_0 = 2$, $b_0 = 0$ et les relations suivantes. $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases}$

Les questions 2, 3 et 4 permettent de déterminer le terme général de ces suites de 3 manières indépendantes.

1. Calculer $a_1 = 2a_0 + b_0 = 4$, $b_1 = a_0 + 2b_0 = 2$, $a_2 = 2a_1 + b_1 = 10$ et $b_2 = a_1 + 2b_1 = 8$
2. **Méthode 1 :**
   (a) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $s_n = a_n + b_n$. Montrons que (s_n) est géométrique et déterminons son terme général. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $s_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_n + b_n + a_n + 2b_n = 3(a_n + b_n) = 3s_n$. Donc (s_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $s_0 = a_0 + b_0 = 2$. Donc$s_n = 3^n s_0 = 2 \times 3^n$
   (b) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d_n = a_n - b_n$. Montrons que (d_n) est constante et déterminons son terme général. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:$d_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = 2a_n + b_n - a_n - 2b_n = a_n - b_n = d_n$. Donc (d_n) est constante et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = d_0 = 2$.
   (c) On a $a_n = \dfrac{s_n + d_n}{2} = \dfrac{2 \times 3^n + 2}{2} = 3^n + 1$ et $b_n = \dfrac{s_n - d_n}{2} = \dfrac{2 \times 3^n - 2}{2} = 3^n - 1$
3. **Méthode 2 :**
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = (2a_{n+1} + b_{n+1}) - 4a_{n+1} + 3a_n = -2a_{n+1} + b_{n+1} + 3a_n = -2(2a_n + b_n) + (a_n + 2b_n) + 3a_n = 0$.
   (b) Déterminons le terme général de (a_n). Considérons l'équation $X^2 - 4X + 3 = 0$. Cete équation a deux solution à savoir $X_1 = 1$ et $X_2 = 3$. Donc $a_n = \alpha + \beta 3^n$ où $(\alpha,\ \beta)$ est la solution du système : $\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha + 3\beta = 4 \end{cases}$ La résolution de ce système donne $\alpha = \beta = 1$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 3^n + 1$.
   (c) On a, d'après la relation de récurrence (1), $b_n = a_{n+1} - 2a_n = 3^{n+1} + 1 - 2(3^n + 1) = 3 \times 3^n + 1 - 2 \times 3^n - 2 = 3^n - 1$.
4. **Méthode 3 :**
   (a) Soit X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On a $X_{n+1} = AX_n$. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.
   Pour $n = 0$, $X_n = A^n X_0$.
   Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$? $X_n = A^n X_0$. Montrons que $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$. En effet ;
   $$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n \\ &= AA^n X_0 \ \textit{d'près l'hypothèse de récurrence} \\ &= A^{n+1} X_0. \end{aligned}$$
   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.
   (b) On définit la suite (α_n) par $\alpha_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+1} = 3\alpha_n + 1$. Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n + 1 & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_n + 1 \end{pmatrix}$
   On a $A^0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 + 1 & \alpha_0 \\ \alpha_0 & \alpha_0 + 1 \end{pmatrix}$
   Supposons que $A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n + 1 & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_n + 1 \end{pmatrix}$
   Montrons que $A^{n+1} = \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} + 1 & \alpha_{n+1} \\ \alpha_{n+1} & \alpha_{n+1} + 1 \end{pmatrix}$
   (c) On considère la suite (β_n) définie par $\beta_n = \alpha_n + \dfrac{1}{2}$. La suite (β_n) est géométrique de raison 3 et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n = 3^n \beta_0$. Donc $\alpha_n + \dfrac{1}{2} = 3^n(\alpha_0 + \dfrac{1}{2})$, soit $\alpha_n = \dfrac{3^n}{2} - \dfrac{1}{2}$.
   (d) On a
   $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n X_0 = \begin{pmatrix} \alpha_n + 1 & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_n + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n + 1 & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_n + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n + 1 \\ 3^n - 1 \end{pmatrix}$.
   Donc $a_n = 3^n + 1$ et $b_n = 3^n - 1$.

1) Exercice 18

Soit u définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice inverse de P la matrice $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. On l'a trouve en appliquant la méthode du pivot vue en cours.
2. Si $D = P^{-1}AP$, après calculs on trouve $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ alors $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}A^nP$, à l'aide d'un raisonnement par récurrence. Pour $n = 0$, $D^0 = I_3$, $A^0 = I_3$ et $P^{-1}I_3P = I_3$ donc $D^0 = P^{-1}A^0P$.
   Supposons que $D^n = P^{-1}A^nP$ pour n fixé.
   $$D^{n+1} = DD^n = DP^{-1}A^nP = P^{-1}APP^{-1}A^nP = P^{-1}A^{n+1}P$$
   . On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^{-1}A^nP = D^n$.
   Ainsi
   $$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2^{n+1}\times 4+(-1)^n-3}{6} & \frac{-(-1)^n+1}{2} & \frac{(-1)^n-2^n\times 4+3}{3} \\ \frac{2\times 2^{n+1}-(-1)^n-3}{6} & \frac{(-1)^n+1}{2} & \frac{-(-1)^n-2\times 2^n+3}{3} \\ \frac{2^{n+1}+(-1)^n-3}{6} & \frac{-(-1)^n+1}{2} & \frac{(-1)^n-2^n+3}{3} \end{pmatrix}$$
4. Un simple calcul matriciel permet de vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$ avec $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.
5. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$, à l'aide d'un raisonnement par récurrence. Pour $n = 0$, $A^0 = I_3$ et $X_0 = I_3X_0$.
   Supposons que $X_n = A^nX_0$ pour n fixé, $X_{n+1} = AX_n = AA^nX_0 = A^{n+1}X_0$.
   On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$.
   Pour obtenir le terme général de u il suffit de calcul le coefficient de la troisième ligne de X_n qui donne $u_n\frac{2^{n+1}+(-1)^n-3}{3} + \frac{-(-1)^n+1}{2} - \frac{(-1)^n-2^n+3}{3}$.

Exercice 19

1. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   et $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   enfin $A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A^3$
2. L'existence se prouve par récurrence :
   - ⋆ Pour $n = 1$ on a $A^1 = 1A + 0A^2$ donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$ conviennent.
   - ⋆ Soit $n \geq 1$ tel qu'il existe a_n et b_n réels avec $A^n = a_nA + b_nA^2$
     alors $A^{n+1} = A^nA = \left(a_nA + b_nA^2\right)A = a_nA^2 + b_nA^3 = a_nA^2 + b_n\left(A^2 + 2A\right) = 2b_nA + (a_n + b_n)A^2$
     Donc $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$ (réels) conviennent.
   - ⋆ Donc pour tout entier n, il existe des uniques a_n et b_n tels que $A^n = a_nA + b_nA^2$ et on a $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$

3. (a) Comme $a_{n+1} = 2b_n$ pour tout $n \geq 1$, on a aussi $a_{n+2} = 2b_{n+1}$ pour tout entier n.
Comme $b_{n+1} = a_n + b_n$ pour tout $n \geq 1$ on a $a_{n+2} = 2a_n + 2b_n$
et comme $b_n = \frac{1}{2}a_{n+1}$ pour $n \geqslant 1$ on a finalement $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$

(b) La suite a est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants
Son équation caractéristique est : $X^2 - X - 2 = 0$ qui a pour racines $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$
Donc pour tout $n \geqslant 1$ on a $a_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^2$.
Comme $A = 1A + 0A^2$ et que $A^2 = 0A + 1A^2$ on a $a_1 = 1$ et $a_2 = 0$ donc α et β sont solutions de
$$\begin{cases} a_1 = \alpha(-1)^1 + \beta 2^1 \\ a_2 = \alpha(-1)^2 + \beta 2^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = -\alpha + 2\beta \\ 0 = \alpha + 4\beta \quad L_2 + L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = -\alpha + 2\beta \\ 1 = 6\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -2/3 \\ \beta = 1/6 \end{cases}$$
donc pour tout entier $n \geq 1$, $a_n = -\dfrac{2}{3}(-1)^n + \dfrac{1}{6}2^n$
et en reportant dans $b_n = \dfrac{1}{2}a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(-1)^n + \dfrac{1}{6}2^n$ pour tout $n \geq 1$

(c) Finalement on trouve que $A^n = \left(-\dfrac{2}{3}(-1)^n + \dfrac{1}{6}2^n\right)A + \left(\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{6}2^n\right)A^2$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Exercice 20

[**Suites et matrices**]

On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Démontrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1-2u_n & 2u_n \\ u_n & -u_n & 1+u_n \end{pmatrix}$.

   On a $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. avec $u_0 = 0$. Montrons pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe u_n supposons que pour un entier n, il existe $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1-2u_n & 2u_n \\ u_n & -u_n & 1+u_n \end{pmatrix}$. On a $A^{n+1} = AA^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1-2u_n & 2u_n \\ u_n & -u_n & 1+u_n \end{pmatrix}$

2. Calculer u_n en fonction de n puis expliciter A^n.

Exercice 21

[**D'après ECRICOME T 2007**]

On se propose de déterminer la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence : $\begin{cases} u_{n+2} & = & 5u_{n+1} - 6u_n \\ u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 1 \end{cases}$
sans utiliser les résultats du cours sur les suites récurrentes doubles. On définit la matrice A par : $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calcul de la puissance n-ème de A

On considère les matrices à coefficients réels B et C définies par : $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

1. On a $BC = CB = 0$ et $B^2 = B$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = B$.
2. On note $P(n)\ :\ C^n = (-1)^{n-1}C$
   Pour $n = 1$, $C^1 = (-1)^{1-1}C$ donc $P(1)$ est vraie.
   Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier non nul n. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.
   On a $C^{n+1} = C^nC = (-1)^{n-1}CC = (-1)^nC$ car $C^2 = -C$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ C^n = (-1)^{n-1}C$.

3. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 19 & -30 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ et $5A - 6I = \begin{pmatrix} 25 & -30 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -30 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$.
   Donc $A^2 = 5A - 6I$.
4. Il résulte de 3) que $A\dfrac{5I - A}{6} = I$. Donc A est-inversible et $A^{-1} = \dfrac{5I - A}{6}$.
5. Pour $n = 0, A^n = I = B - C = 3^n B - 2^n C$.
   Supposons que $A^n = 3^n B - 2^n C$ pour un entier naturel, montrons que $A^{n+1} = 3^{n+1}B - 2^{n+1}C$.
   On a $A^{n+1} = A^n A = (3^n B - 2^n C)(3B - 2C) = 3^{n+1}B^2 + 2^{n+1}C^2 = 3^{n+1}B - 2^{n+1}C$ car $BC = CB = 0$, $B^2 = B$ et $C^2 = -C$.
   Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = 3^n B - 2^n C$.
6. On a $A(\frac{1}{3}B - \frac{1}{2}C) = (3B - 2C)(\frac{1}{3}B - \frac{1}{2}C) = B^2 + C^2 = B - C$ (d'après 1)). Comme $B - C = I$, on a $A(\frac{1}{3}B - \frac{1}{2}C) = I$. Donc $A^{-1} = \frac{1}{3}B - \frac{1}{2}C$.
7. Montrons que pour tout entier naturel n : $\left(A^{-1}\right)^n = \frac{1}{3^n}B - \frac{1}{2^n}C$

En remarquant que $\left(A^{-1}\right)^n = \left(A^n\right)^{-1}$, il suffit de montrer que $A^n(\frac{1}{3^n}B - \frac{1}{2^n}C) = I$. En procédant comme dans 6)) on a $A^n(\frac{1}{3^n}B - \frac{1}{2^n}C) = (3^n B - 2^n C)(\frac{1}{3^n}B - \frac{1}{2^n}C) = B^2 + C^2 = B - C = I$. Donc $\left(A^{-1}\right)^n = \frac{1}{3^n}B - \frac{1}{2^n}C$

Expression de u_n en fonction de n

1. On a pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5u_{n+1} - 6u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
2. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   On note $P(n)$: $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   On a $\begin{pmatrix} u_{0+1} \\ u_0 \end{pmatrix} = A^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Donc $P(0)$ est vraie.
   Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier naturel, montrons que $P(n+1)$ est vraie.
   En effet, on a $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = AA^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'après l'hypothèse de récurrence.
   Donc $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Donc $P(n+1)$ est vraie.
   Conclusion : pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. Donner ainsi l'expression de u_n en fonction de n.
   Il résulte de ce qui précède que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = (3^n B - 2^n C) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit $u_n = 2^{n+1} - 3^n$.