

Exercice 1

1. Suite géométrique donnée sous une forme explicite.
2. Suite géométrique définie par récurrence.
3. Suite arithmétique donnée sous une forme explicite. Décomposer pour écrire cette expression sous la forme classique $c_0 + nr$.
4. Suite arithmétique définie par récurrence.
5. $e_8 = e_3 + (8-3)r$ (relation entre deux termes quelconques de la suite. On trouve ensuite r . Écrire ensuite une relation reliant e_3 et e_0 pour calculer e_0
6. Mêmes idées que la question précédente, à adapter au cas d'une suite géométrique.
7. L'exemple le plus facile ! La suite est CONSTANTE.
8. Mêmes idées que les questions 5 et 6, et aussi simple si on est prêt à trouver une raison irrationnelle...

Exercice 2

1. On trouve $u_1 = \sqrt{10}, u_2 = \sqrt{11}, u_3 = \sqrt{12}$. Comme on a aussi $u_0 = 3 = \sqrt{9}$, cela conduit à la conjecture suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n+9}$, qu'on démontre par récurrence.

Initialisation : la propriété est vraie pour $n = 0$, $u_0 = 3 = \sqrt{0+9}$

Hérédité :

supposons que pour un entier naturel n $u_n = \sqrt{n+9}$ alors

$$u_{n+1} = \sqrt{1 + (\sqrt{n+9})^2} = \sqrt{9 + n + 1}$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : pour tout n $u_n = \sqrt{n+9}$

Remarque : on peut retrouver ce résultat en montrant que cette suite est bien définie, positive et que la suite (u_n^2) est arithmétique de raison 1.

2. **Première façon utilisant la récurrence** Commencer par raisonner ainsi : calculer u_1 et u_2 grâce à la relation de récurrence. On peut ensuite faire le raisonnement suivant : si la formule explicite donnée est vraie, je peux alors calculer u_0 , u_1 et u_2 (qui sont connues) en fonction de a , b et c (c'est le même principe que la méthode pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 pour trouver la valeur de λ et μ). On en déduit ensuite a , b et c en résolvant le système obtenu. On trouve $a = 1, b = -12$ et $c = 0$. Ce n'est pas fini. Il reste à montrer que la formule est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ (alors qu'on sait juste pour le moment qu'elle est vraie pour $n = 0, 1$ et 2). On montre cela par récurrence en remplaçant a , b et c par les valeurs trouvées. L'hérédité se fait à l'identique par rapport au premier point de l'exercice.

Deuxième façon n'utilisant pas la récurrence

On a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} - u_k = 2k - 11$ d'après les données de l'énoncé.

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (2k - 11)$. Or $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0 = u_n$

(télescopage) et $\sum_{k=0}^{n-1} (2k - 11) = 2 \sum_{k=0}^{n-1} k - \sum_{k=0}^{n-1} 11 = n(n-1) - 11n = n^2 - 12n$. Donc $a = 1, b = -12$ et $c = 0$.

Exercice 4

On définit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $a_0 = 0$ et $b_0 = 12$, puis pour $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}$

1. On considère la suite (u_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = b_n - a_n$.
 - (a) On a $u_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} - \frac{a_n + 3b_n}{4} = \frac{5a_n - 5b_n}{12} = \frac{5}{12}u_n$. Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{12}$ et son premier terme $u_0 = b_0 - a_0 = -12$.
 - (b) On déduit de a) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\frac{5}{12}\right)^n u_0$, soit $u_n = \frac{5^n}{12^{n-1}}$.

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = 4b_n + 3a_n$.

$$(a) \quad v_{n+1} = 4b_{n+1} + 3a_{n+1} = \frac{4(a_n + 3b_n)}{4} + \frac{3(2a_n + b_n)}{3} = 3a_n + 4b_n = v_n.$$

Donc la suite (v_n) est constante.

$$(b) \quad \text{On a pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 = 4b_0 + 3a_0 = 48.$$

3.

4. En résolvant pour $n \in \mathbb{N}$, le système $\begin{cases} u_n = b_n - a_n \\ v_n = 4b_n + 3a_n \end{cases}$ On trouve pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_n = -\frac{4}{7} \frac{5^n}{12^{n-1}} + \frac{1}{7} \times 48 \\ b_n = \frac{3}{7} \times \frac{5^n}{12^{n-1}} + \frac{1}{7} \times 48 \end{cases}$$

5. On obtient

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n b_k \\ S_n &= \frac{36}{7} \sum_{k=0}^n \left(\frac{5}{12}\right)^k + \frac{1}{7} \sum_{k=0}^n 48 \\ S_n &= \frac{36}{7} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^{n+1}}{1 - \frac{5}{12}} + \frac{48}{7}(n+1) \\ S_n &= \frac{432}{49} \times \left(1 - \left(\frac{5}{12}\right)^{n+1}\right) + \frac{48}{7}(n+1) \end{aligned}$$

Exercice 5 (Ecriture rationnelle vs écriture périodique)

On remarque que $u_1 = \frac{1}{100}u_0 = 0,0027$ et $u_2 = \frac{1}{100}u_1 = 0,000027$. Ainsi $0,2727 = u_0 + u_1$ et $0,272727 = u_0 + u_1 + u_2$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \underbrace{0,27 \cdots 27}_{n-1 \text{ fois}}$. Or, il est facile de calculer explicitement S_n (somme de référence!). Le nombre cherché est ensuite obtenu via un calcul simple de limite (de référence aussi). Pour le nombre, $0,999999 \cdots$, on adapte avec la suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$ et de premier terme $0,9$. Le reste est identique.

Exercice 6 (Une suite homographique)

$$1. \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{2 - u_{n+1}}{2u_{n+1}} = \frac{2 - \frac{3u_n}{2u_n - 1}}{2 \frac{3u_n}{2u_n - 1}} = \frac{u_n - 2}{6u_n} = -\frac{1}{3}v_n.$$

$$v_0 = \frac{2 - \frac{1}{4}}{2 \times \frac{1}{4}} = \frac{7}{2}.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{7}{2}$.

$$2. \text{ Ainsi pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{7}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \text{ mais } v_n = \frac{2 - u_n}{2u_n} \text{ ce qui donne } u_n = \frac{2}{2v_n + 1}.$$

$$\text{En conclusion pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2}{7 \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 1}.$$

Exercice 7

[Changement de suites divers]

1. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} u_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \times 2 \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} u_n = 2v_n$.
 $v_1 = \frac{1+2}{1+1} u_0 = \frac{4}{3}$. Ainsi la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_1 = \frac{4}{3}$.
- (b) Comme pour $n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{n+1}{n} u_n$ et $v_n = \frac{4}{3} 2^{n-1}$ alors $u_n = \frac{n}{n+1} v_n = \frac{n}{n+1} \times \frac{4}{3} 2^{n-1}$.
2. (a) $u_0 = 3 > 1$.
 Supposons que pour n fixé, $u_n > 1$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x-1}+1$ est strictement croissante sur $]1; +\infty[$, alors $f(u_n) > f(1)$ soit $u_{n+1} > 1$.
 On vient de démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n que $u_n > 1$.
- (b) Montrons que la suite v définie par $v_n = \ln(u_n - 1)$ est géométrique.
 $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln(\sqrt{u_n - 1} + 1 - 1) = \ln(\sqrt{u_n - 1}) = \frac{1}{2} \ln(u_n - 1) = \frac{1}{2} v_n$.
 $v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln(2)$. Ainsi la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $\ln(2)$.
- (c) En utilisant pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression $v_n = \ln(u_n - 1)$ on obtient que $u_n = e^{v_n} + 1$. Ce qui donne :

$$u_n = e^{\ln(2)(\frac{1}{2})^n} + 1 = 2^{\frac{1}{2^n}}$$

Exercice 8

1. Si $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq 2u_n$ alors démontrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 3 \cdot 2^n$.
 $u_0 = 3$ et $3 \times 2^0 = 3$ donc $u_0 \geq 3$.
 Supposons que pour n fixé $u_n \geq 3 \times 2^n$. $u_{n+1} u_{n+1} \geq 2u_n \geq 2 \times 3 \times 2^n = 3 \times 2^{n+1}$.
 Ainsi on vient de démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 3 \cdot 2^n$.
 Comme $2 > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ par comparaison, on trouve $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
2. Si $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} \leq \frac{1}{2} v_n$ alors démontrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq 3 \times (\frac{1}{2})^n$.
 $v_0 = 3$ et $3 \times 2^0 = 3$ donc $v_0 \leq 3$.
 Supposons que pour n fixé $v_n \leq 3 \times (\frac{1}{2})^n$. $v_{n+1} \leq \frac{1}{2} v_n \leq \frac{1}{2} \times 3 \times (\frac{1}{2})^n = 3 \times (\frac{1}{2})^{n+1}$.
 Ainsi on vient de démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq 3 \times (\frac{1}{2})^n$.
 Comme $\frac{1}{2} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$, sachant que (v_n) est positive, on en déduit par comparaison que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

Exercice 9

Soit u de terme général $\frac{n!}{a^n}$.

1. Si $0 < a < 1$:
 on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$, et dans ce cas $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty$.
2. Si $a > 1$:
 (a) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{a^{n+1}} \times \frac{a^n}{n!} = \frac{n+1}{a}$
 On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$. A partir d'un certain rang n_0 , $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 2$.
- (b) La suite u est strictement positive. Montrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour $n \geq n_0$ alors : $u_n \geq 2^{n-n_0} u_{n_0}$.
 $u_{n_0} 2^{n_0-n_0} = u_0$ donc $u_0 \geq u_{n_0} 2^{n_0-n_0} = u_0$.
 Supposons maintenant que pour $n \geq n_0$ fixé, $u_n \geq 2^{n-n_0} u_{n_0}$. D'après la question précédente, pour

$n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq 2u_n$ ce qui donne $u_{n+1} \geq 2(2^{n-n_0}u_{n_0}) = 2^{n-n_0+1}u_{n_0}$. On a démontré que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq 2^{n-n_0}u_{n_0}$.

- (c) Comme $u_0 > 0$ et $2 > 1$ on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n-n_0}u_{n_0} = +\infty$ ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ d'après les théorèmes de comparaison.

Exercice 10

Soit u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$.

1. L'équation $P(X) = X^2 - X - 12 = 0$ admet deux solutions à savoir $X_1 = -3$ et $X_2 = 4$.
Donc $P(X) = (X - 4)(X + 3)$ et $P(X) < 0 \Leftrightarrow X \in]-3; 4[$.
2. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: " u_n est défini et $0 < u_n < 4$ " Pour $n = 0$, $u_n = 1$ est défini et $0 < u_n < 4$. Supposons que pour un entier naturel n , u_n est défini et $0 < u_n < 4$. Montrons que u_{n+1} est défini et $0 < u_{n+1} < 4$.
En effet, la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x + 12}$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Comme $u_n \in]0; +\infty[$ on a $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini et $0 < f(0) = \sqrt{12} < u_{n+1} < f(4) = 4$. Donc $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
On conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
3. Montrons que u est strictement croissante.

Première façon utilisant la récurrence

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: " $u_n < u_{n+1}$ " Pour $n = 0$, $u_0 = 1 < u_1 = \sqrt{13}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supposons que pour un entier naturel n , $u_n < u_{n+1}$. Montrons que $u_{n+1} < u_{n+2}$. En effet, comme f est strictement croissante et $u_n < u_{n+1}$ d'après l'hypothèse de récurrence, on a $f(u_n) < f(u_{n+1})$, soit $u_{n+1} < u_{n+2}$.

On conclut que (u_n) est strictement croissante.

Deuxième façon utilisant la question 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 12} - u_n = \frac{\sqrt{u_n + 12}^2 - u_n^2}{\sqrt{u_n + 12} + u_n} = \frac{-P(u_n)}{\sqrt{u_n + 12} + u_n}$.

Comme $u_n \in]0; 4[$, le dénominateur est strictement positif et le numérateur est strictement positif puisque $P(X) < 0$ pour tout $X \in]-3; 4[$, d'où $u_{n+1} - u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

4. (a) (u_n) est croissante et majorée (d'après 2) et 3), donc d'après le théorème de convergence monotone u converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$.
(b) $0 < l \leq 4$.
(c) Montrons que l vérifie $P(l) = 0$.
La fonction f est continue sur $]0; +\infty[$ et $l \in]0; +\infty[$, donc l est solution de l'équation $x = f(x)$.
Or, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = x \Leftrightarrow x + 12 = x^2 \Leftrightarrow P(x) = 0$.
(d) D'après c) l est solution de $P(x) = 0$. Donc $l = -3$ ou $l = 4$. Mais $l > 0$ d'après b), donc $l = 4$.

Exercice 13

1. (a) La fonction f est définie sur $]0; +\infty[$, elle est croissante comme somme de deux fonctions croissantes
(b) On a $f(x) - x = \ln x$. Donc $f(x) - x$ est négatif sur $]0; 1[$ et positif sur $]1; +\infty[$.
2. (a) D'après l'énoncé $u_0 > 1$ donc $u_0 \geq 1$.
Supposons pour n fixé que $u_n \geq 1$, alors $\ln(u_n) \geq 0$. Ainsi $u_{n+1} = \ln(u_n) + u_n \geq u_n$ or par hypothèse $u_n \geq 1$. Ainsi $u_{n+1} \geq 1$.
On a montré que pour tout n $u_n \geq 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$ donc $u_{n+1} - u_n = \ln(u_n) \geq 0$. La suite (u_n) est donc croissante.
(b) Supposons par l'absurde que la suite est majorée, elle est donc convergente de limite l qui vérifie $l = l + \ln(l)$. (La fonction $f : x \mapsto x + \ln(x)$ est continue sur $]0; +\infty[$.
Ce qui veut dire que $\ln(l) = 0$ soit $l = 1$. On sait que la suite u est croissante et pour tout $u_n \geq 1$ donc $1 \leq u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$, ce qui veut dire que la suite u est constante égale à 1. Absurde car $u_0 > 1$. La suite u est donc non majorée.
En résumé la suite u est croissante et non majorée, elle a donc pour limite $+\infty$.

- (c) Soit v définie par $v_0 \in]0, 1[$ et pour tout entier n , $v_{n+1} = f(v_n)$. Supposons par l'absurde que la suite est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme précédemment on montre que la suite est décroissante non minorée et donc de limite $-\infty$. Il existe donc un rang n à partir duquel $v_n < 0$ ce qui empêche de définir $\ln(v_n)$ ou encore u_{n+1} . On en déduit alors que la suite n'est pas définie à partir d'un certain rang.

Exercice 14

1. Par décroissance de la fonction inverse, on peut écrire que pour $n, k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{n}{n^2 + n} \leq \frac{n}{n^2 + k} \leq \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + 1}$$

Or $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + n} = n \times \frac{n}{n^2 + n} = \frac{n^2}{n^2 + n}$.

Et $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + 1} = n \times \frac{n}{n^2 + 1} = \frac{n^2}{n^2 + 1}$.

Donc

$$\frac{n^2}{n^2 + n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k} \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}$$

$$\frac{n^2}{n^2 + n} \leq w_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}$$

2. Par le théorème d'encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} = 1$.

Exercice 15

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k-1}$.

1. (a) Pour tout $n \geq 1$: $2n+1$ est impair donc $(-1)^{2n+1} = -1$ et $2n+2$ est pair donc $(-1)^{2n+2} = 1$.

$$\frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)-1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)-1} = \frac{-1}{2(2n+1)-1} + \frac{1}{2(2n+2)-1} = \frac{-(2(2n+2)-1) + 2(2n+1)-1}{(2(2n+2)-1)(2(2n+1)-1)}$$

En développant et réduisant

$$\frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)-1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)-1} = \frac{-2}{(4n+1)(4n+3)}$$

- (b) Pour tout n ,

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{2k-1} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k-1} = \sum_{k=2n+1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{2k-1} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)-1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)-1}$$

D'après la première question, on en déduit que

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-2}{(4n+1)(4n+3)} < 0$$

La suite v_n est bien décroissante.

2. Pour tout n ,

$$w_{n+1} - w_n = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{2k-1} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k-1} = \sum_{k=2n+2}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{2k-1} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)-1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2(2n+3)-1}$$

Or $(-1)^{2n+3} = -1$.

$$\frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)-1} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2(2n+3)-1} = \frac{2(2n+3)-1-(2(2n+2)-1)}{(2(2n+2)-1)(2(2n+3)-1)} = \frac{2}{(4n+3)(4n+5)} > 0$$

On en déduit que

$$w_{n+1} - w_n > 0$$

La suite w_n est bien croissante.

$$3. w_n - v_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k-1} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k-1} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)-1} = \frac{(-1)^{2n+1}}{4n+1} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{4n+1} = 0$$

4. Les deux suites v et w sont adjacentes, elles convergent vers une même limite l .

Exercice 16 (Changement de suite (difficile)[ECRICOME 1999])

Soit (x_n) une suite numérique qui vérifie, pour tout entier naturel n , la relation :

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

1. La suite (x_n) est récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants.

Son équation caractéristique $r^2 - \frac{1}{3}r - \frac{1}{3} = 0$ a pour discriminant $\Delta = \frac{1}{9} + \frac{4}{3} = \frac{13}{9}$ et pour solutions $r_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$.

Il existe donc deux réels A et B tels que pour tout $n \in \mathbb{N} : x_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$.

Et ces deux racines appartenant à $] -1, 1[$ on a alors $(r_1)^n \rightarrow 0$ et $(r_2)^n \rightarrow 0$.

Conclusion : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0}$

a et b sont deux réels supérieurs ou égaux à 1

2. On étudie la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = a$ $u_1 = b$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$$

Si u a une limite finie ℓ alors $\ell \geq 1$ et u_{n+1} et u_{n+2} également.

La fonction $\sqrt{\cdot}$ étant continue sur $\mathbb{R}^+$ et ℓ en étant élément, $\ell = \sqrt{\ell} + \sqrt{\ell}$

donc $\ell^2 = 4\ell$ d'où $\ell = 4$ ou $\ell = 0$ et comme $\ell \geq 1$

Conclusion : $\boxed{\text{la seule limite possible de la suite } (u_n) \text{ est } 4.}$

3. On se propose d'établir la convergence de la suite (u_n) par l'étude d'une suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$$

(a) On a $u_n = (2v_n + 1)^2$ alors si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.

(b) On simplifie l'égalité par équivalence : $(2 + v_n \neq 0)$

$$\begin{aligned} v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})} &\iff 2(2 + v_{n+2})v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \\ &\iff 2\left(2 + \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} - 1\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} - 1\right) = \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+1}} - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1 \\ &\iff 2\left(\frac{1}{4}u_{n+2} - 1\right) = \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+1}} + \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 2 \\ &\iff u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n} \end{aligned}$$

cette égalité étant vraie, la première également.

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n : v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}.}$

Comme $u_{n+2} \geq 1$ alors $v_{n+2} = \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} - 1 \geq -\frac{1}{2}$ et $2(2 + v_{n+2}) \geq 3$

donc $v_{n+2} \leq \frac{1}{3}(v_{n+1} + v_n)$

Et comme (inégalité triangulaire) $|a + b| \leq |a| + |b|$ pour tout a et b réel :

Conclusion : $\boxed{|v_{n+2}| \leq \frac{1}{3}(|v_{n+1}| + |v_n|).}$

(c) On note (x_n) la suite définie par : $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et, pour tout entier naturel n ,

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

On procède comme précédemment avec l'HR sur n et $n+1$:

Pour $n=0$ on a $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|v_n| \leq x_n$ et $|v_{n+1}| \leq x_{n+1}$ alors

$$\begin{aligned} |v_{n+2}| &\leq \frac{1}{3}(|v_{n+1}| + |v_n|) \\ &\leq \frac{1}{3}(x_{n+1} + x_n) = x_{n+2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, 0 \leq |v_n| \leq x_n}$

et comme $x_n \rightarrow 0$ d'après la première question, alors par encadrement :

Conclusion : $\boxed{v_n \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty}$

Exercice 17

1. (a) Soit f la fonction définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x+1}{x}$ et g la composée $g = f \circ f$ définie par $g(x) = f(f(x))$. Etudier les sens de variation sur $\mathbb{R}^+$ de f et de g .

(b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation de $f(x) = x$, puis $g(x) = x$. (On montrera qu'elles ont les mêmes solutions a et b avec $b < 0 < a$, que $b = -1/a$ et que $b = 3 - a$)

Soit u la suite définie par : $u_0 > 0$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Montrer que, $\forall n$, u_n est défini et $u_n > 0$

3. On suppose dans cette question que $u_0 = 1$. On définit les suites v et w par : $\forall n$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1} = f(v_n)$.

(a) Montrer que pour tout entier n , $v_{n+1} = g(v_n)$.

(b) Montrer que la suite v est croissante majorée par a . En déduire que v converge vers a .

(c) En déduire que w converge également vers a . Conclure pour u en utilisant le résultat suivant, admis : si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, alors u converge vers cette limite.

4. On pose pour tout entier n , $z_n = \frac{u_n - a}{u_n - b}$. (les valeurs a et b étant celles définies précédemment).

On ne suppose plus que $u_0 = 1$ mais seulement que $u_0 > 0$.

(a) Montrer que, pour tout entier n , z_n est bien définie et que z est une suite géométrique.

(b) Déterminer la valeur de u_n en fonction de z_n . Déterminer sa limite quand n tend vers l'infini.

Exercice 20

Sur le marché d'un certain bien, on note D la fonction de demande globale (des consommateurs), O la fonction

d'offre globale (des entreprises) et p le prix de vente du bien.

On suppose habituellement que la fonction $D : p \mapsto D(p)$ définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles est décroissante et que

la fonction $O : p \mapsto O(p)$ définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles est croissante.

Si l'équation $O(p) = D(p)$ admet une solution p^* , on dit que p^* est un prix d'équilibre du marché.

Avant d'atteindre un niveau d'équilibre, le prix p peut être soumis à des fluctuations provoquées par des excès

d'offre ($O(p) > D(p)$) ou des excès de demande ($D(p) > O(p)$) au cours du temps.

Afin de rendre compte de cette évolution, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n la valeur du prix à l'instant n .

On suppose que la demande dépend de la valeur du prix selon la relation $D_n = D(p_n)$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Quant aux entreprises, elles adaptent à chaque instant $n \in \mathbb{N}$, la quantité offerte O_n à l'instant n à un prix anticipé à l'instant $(n-1)$, noté $\hat{p}_n$, selon la relation $O_n = O(\hat{p}_n)$, où $\hat{p}_0$ peut être interprété comme un prix d'étude de marché.

On suppose qu'à chaque instant, l'offre est égale à la demande, c'est-à-dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{O}_n = D_n$.

Dans toute cette partie, on considère quatre paramètres réels strictement positifs a, b, c, d , avec $a > d$, et on suppose que les fonctions D et O sont définies sur $\mathbb{R}^+$ par : $D(p) = a - bp$ et $O(p) = cp + d$.

Par suite, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{D}(p_n) = a - bp_n$ et $O(\hat{p}_n) = c\hat{p}_n + d$.

1. Dans cette question uniquement, les réels a, b, c, d ont les valeurs suivantes : $a = 40, b = 8, c = 2$ et $d = 20$.

Ainsi on a :

*Pour tout réel $p \geq 0$, $D(p) = 40 - 8p$ et $O(p) = 2p + 20$

*pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{D}(p_n) = 40 - 8p_n$ et $O(\hat{p}_n) = 2\hat{p}_n + 20$.

On suppose que p_0 et p_1 sont donnés et que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $\hat{p}_n = 2p_{n-1} - p_{n-2}$.

- (a) Etablissons l'existence et l'unicité d'un prix d'équilibre p^* :

$$\begin{aligned} D(p) = O(p) &\iff 40 - 8p = 2p + 20 \\ &\iff p = p^* = 2 \end{aligned}$$

- (b) pour tout $n \geq 2$, on sait que :

$$*\hat{p}_n = 2p_{n-1} - p_{n-2}.$$

$$*\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \mathbb{D}(p_n) = O(\hat{p}_n) \iff 40 - 8p_n = 2\hat{p}_n + 20.$$

$$\iff 40 - 8p_n = 2(2p_{n-1} - p_{n-2}) + 20$$

$$\iff 8p_n = 20 - 4p_{n-1} + 2p_{n-2}$$

$$\iff \boxed{p_n = -\frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} + \frac{5}{2}}$$

- (c) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = p_n - p^*$. Montrons que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

$$\text{pour tout } n \geq 2, \text{ on sait que : } p_n = -\frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} + \frac{5}{2}$$

et posant $v_n = p_n - 2, v_{n-1} = p_{n-1} - 2, v_{n-2} = p_{n-2} - 2$, on obtient :

$$v_n + 2 = -\frac{1}{2}(v_{n-1} + 2) + \frac{1}{4}(v_{n-2} + 2) + \frac{5}{2}$$

$$\iff v_n = -\frac{1}{2}v_{n-1} + \frac{1}{4}v_{n-2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 2$$

$$\iff \boxed{\text{pour tout } n \geq 2 : v_n = -\frac{1}{2}v_{n-1} + \frac{1}{4}v_{n-2}}$$

Donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

- (d) L'équation caractéristique de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'équation : $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$, dont les solutions distinctes sont $r_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $r_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

- (e) Il existe ainsi deux réels h, k tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = hr_1^n + kr_2^n$

$$\text{En particulier : } \begin{cases} v_0 = h + k \\ v_1 = hr_1 + kr_2 \end{cases} \iff \begin{cases} h = \frac{r_2 v_0 - v_1}{r_2 - r_1} \\ k = \frac{v_1 - r_1 v_0}{r_2 - r_1} \end{cases}$$

$$\text{donc : pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{r_2 v_0 - v_1}{r_2 - r_1} r_1^n + \frac{v_1 - r_1 v_0}{r_2 - r_1} r_2^n$$

$$\iff \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, p_n = p^* + \frac{r_2 v_0 - v_1}{r_2 - r_1} r_1^n + \frac{v_1 - r_1 v_0}{r_2 - r_1} r_2^n$$

- (f) Comme la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$: $4 < 5 < 9 \implies 2 < \sqrt{5} < 3$,

$$\text{donc on obtient les encadrements : } \begin{cases} \frac{1}{4} < r_1 < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} < r_2 < 1 \end{cases}$$

et par la limite usuelle : $\forall q \in]-1, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$, on a aussi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_1^n = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_2^n = 0$

donc la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien convergente telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = p^*$.

Avec n grand, le marché tend vers sa position d'équilibre.

2. Soit β un paramètre réel vérifiant $0 < \beta \leq 1$. On suppose que le prix p_0 est donné et que les anticipations de

prix sont adaptatives, c'est-à-dire que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\hat{p}_n = \hat{p}_{n-1} + \beta(p_{n-1} - \hat{p}_{n-1})$

- (a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, le prix courant p_n et prix anticipé $\hat{p}_n$ doivent vérifier la relation $\mathbb{D}(p_n) = O(\hat{p}_n)$

$$\text{donc : } a - bp_n = c\hat{p}_n + d \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{a-d}{b} - \frac{c}{b}\hat{p}_n$$

- (b) Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\hat{p}_n = \hat{p}_{n-1} + \beta(p_{n-1} - \hat{p}_{n-1})$ et $p_{n-1} = \frac{a-d}{b} - \frac{c}{b}\hat{p}_{n-1}$
donc

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{a-d}{b} - \frac{c}{b}(\hat{p}_{n-1} + \beta(p_{n-1} - \hat{p}_{n-1})) \\ &= p_{n-1} - \frac{c}{b}\beta p_{n-1} + \frac{c\beta}{b}\hat{p}_{n-1} \\ &= p_{n-1} - \frac{c}{b}\beta p_{n-1} + \beta\left(\frac{a-d}{b} - p_{n-1}\right) \\ &= \left(1 - \beta\left(\frac{c}{b} + 1\right)\right)p_{n-1} + \beta\frac{a-d}{b} \end{aligned}$$

Ainsi : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le prix p_n vérifie bien l'équation de récurrence : $p_n = \left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)p_{n-1} + \beta\frac{a-d}{b}$

- (c) Rappelons que le prix d'équilibre p^* est obtenu ss'il existe $\boxed{p > 0}$ tel que $D(p) = O(p) \Leftrightarrow a - bp =$

$$cp + d \Leftrightarrow p = \boxed{\frac{a-d}{c+b} = p^*}$$

On reconnaît que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

$$\text{Soit } x \text{ le réel solution de l'équation : } x = \left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)x + \beta\frac{a-d}{b} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{a-d}{c+b} = p^*}$$

Alors la suite (v_n) définie par $v_n = p_n - p^*$ est géométrique de raison $q = \left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)$, 1er terme $v_0 = p_0 - p^*$

$$\text{donc : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, p_n = p^* + \left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)^n (p_0 - p^*)}$$

- (d) En supposant que $p_0 \neq p^*$, la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si :

$$\begin{aligned} 1 - \beta\frac{b+c}{b} &\in]-1, 1[\Leftrightarrow -2 < -\beta\frac{b+c}{b} < 0 \\ &\Leftrightarrow 0 < 1 + \frac{c}{b} < \frac{2}{\beta} \cdot \Leftrightarrow \boxed{\frac{c}{b} < \frac{2}{\beta} - 1} \\ &\quad c > 0, b > 0 \\ &\quad \beta \in]0, 1] \end{aligned}$$

$$\text{On a alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)^n (p_0 - p^*) = 0 \text{ et } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = p^* = \frac{a-d}{c+b}}$$

- (e) Comme $\beta \in]0, 1]$, alors on a successivement :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} &\geq 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{\beta} \geq 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{\beta} - 1 \geq 1 \end{aligned}$$

or quand $c < b, b > 0$, alors $0 < \frac{c}{b} < 1$

Donc quand $c < b$, on vérifie la condition : $\frac{c}{b} < \frac{2}{\beta} - 1$ donc la suite la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = p^* = \frac{a-d}{c+b}}$$

Exercice 21

1. Soit $a \in]-1; +\infty[$. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $(1+a)^n \geq 1+na$.

Soit $\mathcal{P}(n)$: $(1+a)^n \geq 1+na$.

Initialisation : on a $(1+a)^0 = 1 \geq 1+0 \times a = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier n , c'est à dire, $(1+a)^n \geq 1+na$, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$.

En effet,

$$\begin{aligned} (1+a)^n \geq 1+na &\Rightarrow (1+a) \times (1+a)^n \geq (1+a)(1+na) \Rightarrow (1+a)^{n+1} \geq 1+na+a+na^2 \\ &\Rightarrow (1+a)^{n+1} \geq (1+(n+1)a) + na^2 \\ &\Rightarrow (1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a \text{ puisque } na^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n , soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1+na$$

2. Voici un contre-exemple : si $a = -4$ et $n = 3$, on a $(1+(-4))^3 = (-3)^3 = -27 < 1+4 \times (-3) = -11$.

Exercice 23

Soit $P(n)$: $u_n = n+1$.

Initialisation : $u_0 = 1 = 0+1$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire, $u_n = n+1$.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire,

$$u_{n+1} = n+2.$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) u_n \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) (n+1) \text{ (par HR)} \\ &= n+1 + \frac{n+1}{n+1} \\ &= n+2. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n+1$.

Exercice 24

1. Soit $P(n)$: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation : $\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1 \times (1+1)}{2}$, donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, c'est à dire, $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire, $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

En effet,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^n k \right) + n + 1 \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \text{ (d'après HR)} \\
&= (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Soit $P(n) : \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Initialisation : $\sum_{k=1}^1 k^2 = 1 = \frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6}$, donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : supposons que $P(n)$ est vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$, c'est à dire, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire, $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

En effet,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \text{ (d'après HR)} \\
&= (n+1) \left(\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1 \right) \\
&= (n+1) \frac{2n^2 + n + 6(n+1)}{6} \\
&= (n+1) \left(\frac{2n^2 + 7n + 6}{6} \right) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Soit $P(n) : \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$.

Initialisation : $\sum_{k=1}^1 k^3 = 1 = \left(\frac{1 \times (1+1)}{2} \right)^2$, donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, c'est à dire,

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire, $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2$

En effet,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left(\sum_{k=1}^n k^3 \right) + (n+1)^3 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3 \text{ (d'après HR)} \\
&= (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1 \right) \\
&= (n+1)^2 \times \left(\frac{n^2 + 4(n+1)}{4} \right) \\
&= (n+1)^2 \times \frac{n^2 + 4n + 4}{4} \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2.
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$.

Exercice 25

1. Soit $P(n) : n! > n^2$.

Initialisation

Pour $n = 4$, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 > 16 = 4^2$.

Donc $P(4)$ est vraie

Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \geq 4$, c'est à dire, $n! > n^2$.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie.

En effet, on a

$$(n+1)! = (n+1)n! > (n+1)n^2 \text{ (par HR)}.$$

Comme $n \geq 4$, on a $n^2 = n \times n \geq 4n$. Or pour $n \geq 4$, $4n = n + 3n > n + 1$, d'où $n^2 \geq (n+1)$.

Donc $(n+1)n^2 \geq (n+1)^2$, et $(n+1)! > (n+1)^2$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout entier $n \geq 4$, $n! \geq n^2$.

2. Montrons par récurrence que : $\forall n \geq 6, n! > n^3$.

Soit $P(n) : n! > n^3$.

Initialisation

Pour $n = 6$, $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720 > 6^3 = 216$. Donc $P(6)$ est vraie

Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \geq 6$, c'est à dire, $n! > n^3$.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie.

En effet, $(n+1)! = (n+1)n! > (n+1)n^3$ (par hypothèse de récurrence)

Comme $n \geq 6$, on a $n^3 = n \times n^2 \geq 6n^2$. Or pour tout $n \geq 6$ on a :

$$\begin{aligned}
6n^2 &= (n^2 + 2n^2 + n^2) + 2n^2 \\
&> (n^2 + 2n + 1) + 2n^2 \text{ (car } n > 1) \\
&\geq (n+1)^2 (car n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2) \\
&\text{et } 2n^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

D'où $(n+1)n^2 \geq (n+1)^3$, soit $(n+1)! \geq (n+1)^3$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout entier $n \geq 6$, $n! \geq n^6$.

Exercice 26

Soit $P(n) : 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$.

Initialisation : $1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4} > \frac{3 \times 2}{2 \times 2 + 1} = \frac{6}{5}$, donc $P(2)$ est vraie.

Hérédité : supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, c'est à dire, $P(n) : 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$. Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire, $1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{3(n+1)}{2n+3}$.

En effet,

$1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$ (par hypothèse de récurrence). Donc pour montrer $P(n+1)$, il suffit de montrer que $\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{3(n+1)}{2n+3}$, soit $\frac{3n}{2n+1} - \frac{3(n+1)}{2n+3} + \frac{1}{(n+1)^2} > 0$.

$$\begin{aligned} \text{On a } & \frac{3n}{2n+1} - \frac{3(n+1)}{2n+3} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{3n}{2n+1} - \frac{3(n+1)}{2n+3} + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= \frac{3n(n+1)^2(2n+3) - 3(n+1)^3(2n+1) + (2n+1)(2n+3)}{(n+1)^2(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{3(n+1)^2(n(2n+3) - (n+1)(2n+1)) + (2n+1)(2n+3)}{(n+1)^2(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{3(n+1)^2(2n^2 + 3n - (2n^2 + n + 2n + 1)) + (4n^2 + 6n + 2n + 3)}{(n+1)^2(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{-3(n+1)^2 + (4n^2 + 8n + 3)}{(n+1)^2(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{-3n^2 - 6n - 3 + 4n^2 + 8n + 3}{(n+1)^2(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2(2n+1)(2n+3)} > 0. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$

Exercice 27

Soit (u_n) la suite réelle déterminée par

$$u_0 = 2, u_1 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

Montrons par récurrence double que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 1$$

Soit $P(n) : u_n = 2^n + 1$.

Initialisation : On a $u_0 = 2 = 2^0 + 1$ et $u_1 = 3 = 2^1 + 1$. Donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

Hérédité : Supposons que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire, $u_n = 2^n + 1$ et $u_{n+1} = 2^{n+1} + 1$, montrons que $P(n+2)$ est vraie.

En effet, on a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n \\ &= 3(2^{n+1} + 1) - 2(2^n + 1) \text{ (par HR)} \\ &= 3 \times 2^{n+1} + 3 - 2 \times 2^n - 2 \\ &= 3 \times 2^{n+1} + 3 - 2^{n+1} - 2 \\ &= 2 \times 2^{n+1} + 1 \\ &= 2^{n+2} + 1 \end{aligned}$$

Donc $P(n+2)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 1$