Exercice 1

1. Écrire à l'aide d'une puissance de 2 : $\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$
2. Écrire à l'aide de $\sqrt{x}$: $x^{\frac{1}{2}}$; $x^{\frac{3}{2}}$; $x^{-\frac{1}{2}}$

Exercice 2

]

1. Exprimer uniquement à l'aide de $\ln 2$: $\ln(8)$; $\ln(\sqrt{2})$; $\ln 6 - \ln 3$; $\ln(2\mathrm{e}^2)$.
2. Simplifier lorsque c'est possible : $\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{2x}}$; $\mathrm{e}^{x^2} - (\mathrm{e}^x)^2$; $\dfrac{\mathrm{e}^{x^2+2x}}{\mathrm{e}^{(x+1)^2}}$; $\dfrac{\ln(2x)}{\ln x}$; $\mathrm{e}^{2\ln x}$; $\ln(2x) - \ln x$; $\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
3. Mettre sous forme exponentielle : 2^x ; x^3 ; x^y.

Exercice 3

1. Montrer que : $\forall x \geqslant 0, \quad \sqrt{\dfrac{1}{x+3}} \leqslant \sqrt{\dfrac{1}{x+1}}$.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{2x+1} \leqslant \mathrm{e}^{(x+1)^2}$.
3. Encadrer les expressions suivantes :
   (a) $\mathrm{e}^{(1-x)^2}$ sur $[2;4]$
   (b) x^2 sur $[-1;1]$
   (c) $\dfrac{1}{\ln(1-x^2)}$ sur $]0;1[$

Exercice 4

Résoudre les équation suivantes.

1. $\ln(1+e^x) = 2$
2. $(1+\ln x)^2 = 4$
3. $\sqrt{1-\ln x} = 2$
4. $|\ln x| = 1$
5. $|e^x| = 1$
6. $(\ln x)^2 + 3\ln x + 2 = 0$.
7. $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = 2$ $(X = \mathrm{e}^x)$

Exercice 5

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\ln(2x) \leqslant 1$
2. $x^2 > 0$
3. $e^{3x-1} \leqslant 1$
4. $\dfrac{1}{e^x+1} < 1$
5. $2^x \leqslant 3$
6. $3^{2x+1} > 1$

Exercice 6

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$. On désigne par $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Justifier que f est bien définie et sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Représenter l'allure de $\mathcal{C}_f$ en tenant compte des résultats des questions précédentes. La fonction est-elle paire ? Impaire ?

Exercice 7

1. (a) Déduire de l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant 1 + x$ vue en cours, que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad e^x \geqslant 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.

   (b) En utilisant la même méthode, déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geqslant 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$.

   (c) Sauriez-vous généraliser ?

2. Soient a et b deux réels strictement positifs. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{x}{b}$. Déduire que : $\forall x > 0, \quad \dfrac{a}{x} + \dfrac{x}{b} \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}}$

Exercice 8

Soit f définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{(1 + e^x)^2}$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$.
2. Démontrer que f est paire.
3. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = \dfrac{e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^3}$.
4. Donner le tableau des variations de f.
5. Démontrer que : $\forall x \in [0, +\infty[, \ -\frac{1}{3} \leqslant f'(x) \leqslant 0$.
6. Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[, \ -\frac{1}{3}x + \frac{1}{4} \leq f(x)$. (*on pourra poser* $g(x) = f(x) - (-\frac{1}{3}x + \frac{1}{4})$ *et étudier la fonction* g)

Exercice 9

Soit th la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\operatorname{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

1. Montrer que $\operatorname{th}(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$
2. Résoudre l'équation $\operatorname{th}(x) = y$ en fonction des valeurs de y.
3. En déduire que th est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un ensemble à préciser.

Exercice 10

On définit les fonctions *ch* et *sh* par : $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Soit alors f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sh}(x)}$

1. **Étude des fonctions sh et ch**
   (a) Quels sont les ensembles de définition de ch et sh ?
   (b) Étudier la parité de ch et sh.
   (c) Étudier les variations de sh sur $\mathbb{R}$ puis déduire son signe sur $\mathbb{R}$.
   (d) Étudier les variations de ch.
   (e) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) > \operatorname{sh}(x)$.
   (f) Tracer sur un même graphique les allures de ch et sh.
2. **Étude de la fonction f**
   (a) Donner l'ensemble de définition de f puis étudier sa parité.
   (b) On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = \operatorname{sh}(x) - x\operatorname{ch}(x)$. Étudier les variations de g puis déduire son signe.
   (c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   (d) En tenant compte de toutes les informations à votre disposition, tracer l'allure de la courbe de f sur $\mathbb{R}$.
3. **Quelques formules**
   (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.
   (b) Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) = \operatorname{ch}(a + b)$.