

Exercice 1 (carrée et exposant fractionnaire)

1. Écrire à l'aide d'une puissance de 2 : $\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$;
 $\frac{2}{\sqrt{2}}$
2. Écrire à l'aide de \sqrt{x} : $x^{\frac{1}{2}}$; $x^{\frac{3}{2}}$; $x^{-\frac{1}{2}}$

Exercice 2 (Logarithme et exponentielle)

1. Exprimer uniquement à l'aide de $\ln 2$: $\ln(8)$; $\ln(\sqrt{2})$; $\ln 6 - \ln 3$; $\ln(2e^2) - 2$.
2. Simplifier lorsque c'est possible : $\frac{e^{x^2}}{e^{2x}}$; $e^{x^2} - (e^x)^2$; $\frac{e^{x^2+2x}}{e^{(x+1)^2}}$; $\frac{\ln(2x)}{\ln x}$; $e^{2 \ln x}$; $\ln(2x) - \ln x$; $\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
3. Mettre sous forme exponentielle : 2^x ; x^3 ; x^y .

Exercice 3 (Comparaisons successives)

1. Montrer que : $\forall x \geq 0, \sqrt{\frac{1}{x+3}} \leq \sqrt{\frac{1}{x+1}}$.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x+1} \leq e^{(x+1)^2}$.
3. Encadrer les expressions suivantes :
 - (a) $e^{(1-x)^2}$ sur $[2; 4]$
 - (b) x^2 sur $[-1; 1]$
 - (c) $\frac{1}{\ln(1-x^2)}$ sur $]0; 1[$

Exercice 4 (Équations)

Résoudre les équation suivantes.

1. $\ln(1 + e^x) = 2$
2. $(1 + \ln x)^2 = 4$
3. $\sqrt{1 - \ln x} = 2$
4. $|\ln x| = 1$
5. $|e^x| = 1$
6. $(\ln x)^2 + 3 \ln x + 2 = 0$.
7. $e^x + e^{-x} = 2$ ($X = e^x$)

Exercice 5 (Inéquations)

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\ln(2x) \leq 1$
2. $x^2 > 0$
3. $e^{3x-1} \leq 1$
4. $\frac{1}{e^x + 1} < 1$
5. $2^x \leq 3$
6. $3^{2x+1} > 1$

Exercice 6 (Etude de fonction)

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$. On désigne par \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

1. Justifier que f est bien définie et sur \mathbb{R} .
2. Étudier les variations de f sur \mathbb{R} .
3. Représenter l'allure de \mathcal{C}_f en tenant compte des résultats des questions précédentes. La fonction est-elle paire ? Impaire ?

Exercice 7 (Inégalités et études de fonction)

- (a) Dédurre de l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$ vue en cours, que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.
 (b) En utilisant la même méthode, déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$.
 (c) Sauriez-vous généraliser ?
- Soient a et b deux réels strictement positifs. Étudier les variations de la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{x}{b}$. Dédurre que : $\forall x > 0, \frac{a}{x} + \frac{x}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}$

Exercice 8 (Inégalités et études de fonction)

Soit f définie par $f(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$

- Déterminer \mathcal{D}_f .
- Démontrer que f est paire.
- Démontrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^3}$.
- Donner le tableau des variations de f .
- Démontrer que : $\forall x \in [0, +\infty[, -\frac{1}{3} \leq f'(x) \leq 0$.
- Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[, -\frac{1}{3}x + \frac{1}{4} \leq f(x)$. (on pourra poser $g(x) = f(x) - (-\frac{1}{3}x + \frac{1}{4})$ et étudier la fonction g)

Exercice 9 (Bijection)

Soit th la fonction définie sur \mathbb{R} par $\text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

- Montrer que $\text{th}(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$
- Résoudre l'équation $\text{th}(x) = y$ en fonction des valeurs de y .
- En déduire que th est une bijection de \mathbb{R} vers un ensemble à préciser.

Exercice 10 (Application à l'économie)

On estime que le nombre d'abonnés à une revue littéraire peut être modélisé par la fonction a définie par $a(p) = -0.4p^2 - 5p + 13000$, où p est le prix de l'abonnement annuel en euros ($p \in [0; 150]$).

La recette est le montant total des abonnements annuels perçus par l'éditeur. Calculer la recette maximale en précisant le nombre d'abonnés correspondant à cette situation.

Exercice 11 (Application à l'économie)

Le bénéfice en milliers d'euros que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x centaines d'objets (pour x compris entre 0 et 6) est donné par $B(x) = (200x - 300)e^{x-1} + 10$.

Déterminer le bénéfice maximal ainsi que le nombre d'objets qui correspond à cette situation.

Exercice 12 (Application à l'économie)

On considère un objet dont le prix unitaire est x en centaines d'euros. D'après une étude de marché, l'offre O et la demande D pour cet objet, en centaines d'unités sont définies pour tout $x \geq 0$ par :

$$O(x) = e^{0.7x} - 1 \quad \text{et} \quad D(x) = \frac{14}{e^{0.7x} + 1}. \text{ Calculer le prix d'équilibre.}$$

Exercice 13 (Adapté d'Ecricome 2003)

On définit les fonctions ch et sh par : $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Soit alors f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{sh(x)}$

1. Étude des fonctions sh et ch

- Quels sont les ensembles de définition de ch et sh ?
- Étudier la parité de ch et sh .
- Étudier les variations de sh sur \mathbb{R} puis déduire son signe sur \mathbb{R} .
- Étudier les variations de ch .
- Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) > sh(x)$.
- Tracer sur un même graphique les allures de ch et sh .

2. Étude de la fonction f

- Donner l'ensemble de définition de f puis étudier sa parité.
- On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = sh(x) - x ch(x)$. Étudier les variations de g puis déduire son signe.
- En déduire les variations de f sur \mathbb{R} .
- En tenant compte de toutes les informations à votre disposition, tracer l'allure de la courbe de f sur \mathbb{R} .

3. Quelques formules

- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, ch^2(x) - sh^2(x) = 1$.
- Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, ch(a) ch(b) + sh(a) sh(b) = ch(a + b)$.