Exercice 1

1. $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$; $2\sqrt{2} = 2^{\frac{3}{2}}$;
$\dfrac{2}{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$
2. $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$; $x^{\frac{3}{2}} = x\sqrt{x}$; $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Exercice 2

1. $\ln(8) = \ln 2^3 = 3\ln 2$; $\ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln 2$; $\ln 6 - \ln 3 = \ln\dfrac{6}{3} = \ln 2$; $\ln(2\mathrm{e}^2) - 2 = \ln 2 + \ln \mathrm{e}^2 - 2 = \ln 2$.
2. $\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{2x}} = \mathrm{e}^{x^2-2x}$; $\mathrm{e}^{x^2} - (\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e}^{2x}$; $\dfrac{\mathrm{e}^{x^2+2x}}{\mathrm{e}^{(x+1)^2}} = \mathrm{e}^{x^2+2x-(x+1)^2} = \mathrm{e}^{-1}$;
$\forall x \in]0\,;+\infty[$,
$\dfrac{\ln(2x)}{\ln x}$ ne peut être simplifiée ; $\mathrm{e}^{2\ln x} = \mathrm{e}^{\ln x^2} = x^2$; $\ln(2x) - \ln x = \ln(\frac{2x}{x}) = \ln 2$; $\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -2\ln x$.
3. $2^x = \mathrm{e}^{x\ln 2}$; $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ x^3 = \mathrm{e}^{\ln x^3} = \mathrm{e}^{3\ln x}$; $x^y = \mathrm{e}^{\ln x^y} = e^{y\ln x}$.

Exercice 3

1. Soit $x > 0$. On a $1 < 3 \Rightarrow x+1 < x+3 \Rightarrow \frac{1}{x+1} > \frac{1}{x+3}$ (la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$) Donc, en appliquant la racine carrée à cette inégalité portant sur des nombres positifs, on obtient bien $\sqrt{\frac{1}{x+1}} > \sqrt{\frac{1}{x+3}}$
2. Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, cela revient à montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 2x+1 \leqslant (x+1)^2$.
Or, pour tout réel x, on a $(x+1)^2 - (2x+1) = x^2 + 2x + 1 - (2x+1) = x^2 \geqslant 0$, donc $2x+1 \leqslant (x+1)^2$.
3. (a) La fonction $x \mapsto (1-x)^2 = x^2 - 2x + 1$ est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$ (voir sens de variation d'un trinôme). Donc $\forall x \in [2\,;4]$, $(1-2)^2 \leqslant (1-x)^2 \leqslant (1-4)^2$, soit $\forall x \in [2\,;4]$, $1 \leqslant (1-x)^2 \leqslant 9$. Par croissance de la fonction exponentielle, on obtient $\mathrm{e} \leqslant \mathrm{e}^{(1-x)^2} \leqslant \mathrm{e}^9$.
   (b) Le tableau de variation de la fonction carrée donne $\forall x \in [-1\,;1],\ 0 \leqslant x^2 \leqslant 1$
   (c) Soit $x \in]0\,;1[$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{\ln(1-x^2)}$. On a $f'(x) = -\dfrac{(\ln(1-x^2))'}{(\ln(1-x^2))^2}$. Comme le dénominateur est positif, le signe de $f'(x)$ est celui de $-(\ln(1-x^2))' = \dfrac{2x}{1-x^2}$. Comme $1-x^2 > 0$ sur $]0\,;1[$, $f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $]0\,;1[$.

Exercice 4

1. $\forall x \in \mathbb{R}$,
$\ln(1+e^x) = 2 \Leftrightarrow 1 + \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^2 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^2 - 1$
$\Leftrightarrow x = \ln(\mathrm{e}^2 - 1)$.
Donc $S = \{\ln(\mathrm{e}^2 - 1)\}$
2. $\forall x \in]0\,;+\infty[$,
$(1+\ln x)^2 = 4 \Leftrightarrow (1 + \ln x = -2$ *ou* $1 + \ln x = 2) \Leftrightarrow (\ln x = -3$ *ou* $\ln x = 1)$
$\Leftrightarrow (x = \mathrm{e}^{-3}$ *ou* $x = \mathrm{e})$
Donc $S = \{\mathrm{e}^{-3};\ \mathrm{e}\}$
3. $\forall x \in]0\,;+\infty[$,
$\sqrt{1-\ln x} = 2 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 4 \Leftrightarrow \ln x = -3 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-3}$.
Donc $S = \{\mathrm{e}^{-3}\}$
4. $|\ln x| = 1 \Leftrightarrow (\ln x = -1$ *ou* $\ln x = 1)$
$\Leftrightarrow (x = \mathrm{e}^{-1}$ *ou* $x = \mathrm{e})$
Donc $S = \{\mathrm{e}^{-1};\ \mathrm{e}\}$
5. $\forall x \in \mathbb{R}$,
$|\mathrm{e}^x| = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
Donc $S = \{0\}$.
6. Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$,
si on pose $X = \ln x$, on a
$(\ln x)^2 + 3\ln x + 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 + 3X + 2 = 0$.
Comme $\Delta = 1$, $X^2 + 3X + 2 = 0$ admet deux solutions à savoir
$X_1 = \dfrac{-3-1}{2} = -2$ et $X_2 = \dfrac{-3+1}{2} = -1$.
Donc $S = \{\mathrm{e}^{-2}.\ \mathrm{e}^{-1}\}$
7. Pour tout$x \in \mathbb{R}$,
En multipliant les deux membres de l'égalité par e^x et en posant $X = \mathrm{e}^x$, on a
$\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = 2 \Leftrightarrow (\mathrm{e}^x)^2 + 1 = 2\mathrm{e}^x$
$\Leftrightarrow X^2 - 2X + 1 = 0 \Leftrightarrow (X-1)^2 = 0 \Leftrightarrow X = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
Donc $S = \{0\}$.

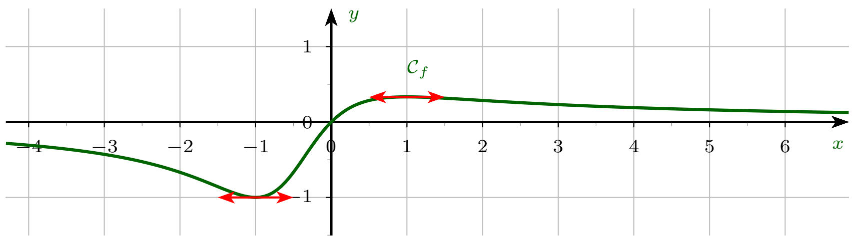
Exercice 5

1. $\forall x \in]0\,;+\infty[$,
   $\ln(2x) \leqslant 1 \Leftrightarrow 2x \leqslant \mathrm{e} \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.
   Donc $S =]-\infty\,;\dfrac{\mathrm{e}}{2}]$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.
   Donc $S = \mathbb{R}^*$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $e^{3x-1} \leqslant 1 \Leftrightarrow 3x - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{1}{3}$.
   Donc $S =]-\infty\,;\dfrac{1}{3}]$
4. $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $\dfrac{1}{e^x+1} < 1 \Leftrightarrow 1 < e^x + 1 \Leftrightarrow 0 < e^x$
   Donc $S = \mathbb{R}$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $2^x \leqslant 3 \Leftrightarrow \ln 2^x \leqslant \ln 3 \Leftrightarrow x \ln 2 \leqslant \ln 3$
   $\Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{\ln 3}{\ln 2}$.
   Donc $S =]-\infty\,;\dfrac{\ln 3}{\ln 2}]$.
6. $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $3^{2x+1} > 1 \Leftrightarrow 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{2}$.
   Donc $S =]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty[$.

Exercice 6

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$. On désigne par $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. $f(x)$ existe si, et seulement si, $x^2 + x + 1 \neq 0$. Or $\Delta < 0$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. f est une fraction , donc dérivable sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. On a $f'(x) = \dfrac{(x^2+x+1) - x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2}$.
   elle est strictement croissante sur $[-1\,;1]$. De plus f' s'annule en -1 et 1, donc les tangentes à $\mathcal{C}_f$ au points d'abscisses -1 et 0 sont horizontales.Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Voici l'allure de $\mathcal{C}_f$:



   On a $f(-1) = -1$ et $f(1) = \dfrac{1}{3}$ donc f n'est ni paire ni impaire.

Exercice 7

1. (a) On pose $f_1(x) = \mathrm{e}^x - (1+x)$ et $f_2(x) = \mathrm{e}^x - (1 + x + \dfrac{x^2}{2})$.
   L'inégalité demandée revient à montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_2(x) \geqslant 0$.
   En effet, la fonction f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f_2'(x) = f_1(x) \geqslant 0$ (par hypothèse) .
   Donc f_2 est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_2(x) \geqslant f_2(0) = 0$.
   Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad e^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

   (b) On pose $f_3(x) = \mathrm{e}^x - (1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6})$.
   En utilisant la même méthode, montrons que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$, c'est à dire $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_3(x) \geqslant 0$.
   En effet, la fonction f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f_3'(x) = f_2(x) \geqslant 0$ (d'après a)) .
   Donc f_3 est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_3(x) \geqslant f_3(0) = 0$.
   Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ , \quad e^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$.

(c) Montrons par récurrence que $P(n)$: « $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$ »est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
$P(1)$ est vraie d'après l'hypothèse.
Supposons que pour un entier non nul n, $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.
Pour cela on pose $f_n(x) = \mathrm{e}^x - (1 + x + \cdots + \dfrac{x^n}{n!})$.
On a $f_{n+1}(x) = \mathrm{e}^x - (1 + x + \cdots + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!})$.
La fonction f_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f'_{n+1}(x) = f_n(x) \geqslant 0$ (par hypothèse de récurrence) .
Donc f_{n+1} est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_{n+1}(x) \geqslant f_{n+1}(0) = 0$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad e^x \geqslant 1 + x + \cdots + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = -\dfrac{a}{x^2} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{x^2 - ab}{bx^2}$.
Comme $bx^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $x^2 - ab$, en particulier f' est négative sur $]0\,;\sqrt{ab}]$ et positive sur $[\sqrt{ab}\,;+\infty[$. Donc f est décroissante sur $]0\,;\sqrt{ab}]$ et croissante sur $[\sqrt{ab}\,;+\infty[$.
Donc $\forall x > 0, \quad f(x) \geqslant f(\sqrt{ab})$. Or $f(\sqrt{ab}) = \dfrac{a}{\sqrt{ab}} + \dfrac{\sqrt{ab}}{b} = \sqrt{\dfrac{a}{b}} + \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, soit $\forall x > 0, \quad \dfrac{a}{x} + \dfrac{x}{b} \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Exercice 8

Soit f définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. On a

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} \\ &= \frac{e^{2x}\mathrm{e}^{-x}}{e^{2x}(1+\mathrm{e}^{-x})^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{x}}{(e^{x}(1+\mathrm{e}^{-x}))^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc f est paire.

3. f est dérivable comme composée de fonctions dérivables et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)^2 - \mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x))}{(1+\mathrm{e}^x)^4} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x) - \mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^3} (\text{ simplification par } 1+\mathrm{e}^x \text{ }) \\ &= \frac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^3} (\text{ factorisation par } \mathrm{e}^x \text{ }) \end{aligned}$$

4. Le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - \mathrm{e}^x$ car $\dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^3} > 0$. Donc f' est positive sur $]-\infty\,;0]$ et négative sur $[0\,;+\infty[$. D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$

5. On a $\forall x \in [0,+\infty[,\ f'(x) \leqslant 0$ d'après 4). Montrons que $\forall x \in [0,+\infty[,\ -\frac{1}{3} \leqslant f'(x)$. En effet, pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) + \frac{1}{3} &= \frac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^3} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{3\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x) + (1+\mathrm{e}^x)^3}{3(1+\mathrm{e}^x)^3} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{3x} + 6\mathrm{e}^x + 1}{3(1+\mathrm{e}^x)^3}. \end{aligned}$$

Comme exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$, $f'(x) + \frac{1}{3} \geqslant 0$.
Donc $\forall x \in [0,+\infty[,\ -\frac{1}{3} \leqslant f'(x) \leqslant 0$.

6. Montrons que $\forall x \in [0,+\infty[,\ -\frac{1}{3}x + \frac{1}{4} \leq f(x)$. On pose, pour tout $x \in [0,+\infty[,\ g(x) = f(x) - (-\frac{1}{3}x + \frac{1}{4})$. On a $\forall x \in [0,+\infty[, g'(x) = f'(x) - (-\frac{1}{3}) \geqslant 0$, d'après 5). Donc g est croissante sur $[0,+\infty[$ et on a $\forall x \in [0,+\infty[,\ g(x) \geqslant g(0) = 0$. Donc $\forall x \in [0,+\infty[,\ -\frac{1}{3}x + \frac{1}{4} \leq f(x)$.

Exercice 9

Soit th la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$

1. Montrons que $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$. En effet, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} &= \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1} \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$.

2. Résolvons l'équation $\mathrm{th}(x) = y$ en fonction des valeurs de y.
Tout d'abord, montrons que $\mathrm{th}(x) = y \Rightarrow y \in \left]-1\,;1\right[$.
En effet; comme $-\mathrm{e}^{2x} - 1 < \mathrm{e}^{2x} - 1 < \mathrm{e}^{2x} + 1$, en divisant les deux membres de cette inégalité par $\mathrm{e}^{2x} + 1$ on obtient $-1 < y < 1$.
Pour tout $y \in \left]-1\,;1\right[$ on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{th}(x) = y &\Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1} = y \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} - 1 = y(\mathrm{e}^{2x}+1) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} - 1 = y\mathrm{e}^{2x} + y \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} - y\mathrm{e}^{2x} = 1 + y \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}(1-y) = 1 + y \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \\ &\Leftrightarrow 2x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \end{aligned}$$

3. D'après 2), $\forall y \in \left]-1\,;1\right[,\ \exists! x \in \mathbb{R},\ y = \mathrm{th}(x)$. Donc th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]-1\,;1\right[$.

Exercice 10

1. **Étude des fonctions** sh **et** ch

   (a) Les deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$.

   (b) $\operatorname{ch}(-x) = \dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(x)$ et $\operatorname{sh}(-x) = \dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2} = -\operatorname{sh}(x)$ La fonction ch est donc paire et la fonction sh est impaire.

   (c) On étudie la fonction sh sur $\mathbb{R}_+$ et on déduira les variations et le signe sur $\mathbb{R}$ par parité.

   - ⋆ sh est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{sh}'(x) = \dfrac{e^{x}-(-e^{-x})}{2} = \operatorname{ch}(x)$. Étant donné que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{x} > 0$ alors $\operatorname{sh}'(x) = ch(x) > 0$. Ce qui veut dire que la fonction sh est strictement croissante.
   - ⋆ Étudions le signe de la fonction sh.

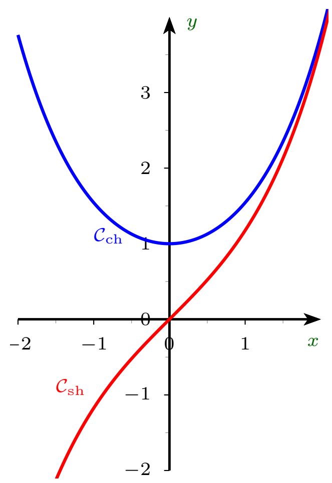
     $\operatorname{sh}(x) \geqslant 0$ lorsque $e^{x} \geqslant e^{-x}$, en appliquant la fonction ln à l'inégalité précédente on trouve que $\operatorname{sh}(x) \geqslant 0$ lorsque $x \geqslant -x$ c'est à dire lorsque $x \geqslant 0$.

     Ainsi la fonction sh est positive sur $\mathbb{R}_+$.
   - ⋆ Par parité on en déduit que sh est décroissante et négative sur $\mathbb{R}_-$.

   (d) ch est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{ch}'(x) = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x)$.
   Le signe de sh obtenue dans la question précédente permet de conclure La fonction ch est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

   (e) Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > e^{-x}$, alors $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} > \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x)$.

   (f) Les courbes représentatives sont données ci-dessous :

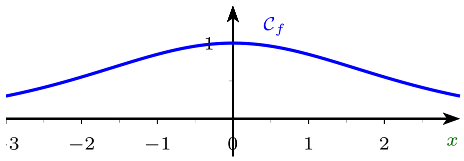


2. (a) La fonction f est définie pour des valeurs n'annulant pas la fonction sh, c'est à dire pour $x \neq 0$. En conclusion la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$.
   Pour $x \neq 0$
   $$f(-x) = \frac{-x}{\operatorname{sh}(-x)} = \frac{-x}{-\operatorname{sh}(x)} = \frac{x}{\operatorname{sh}(x)} = f(x)$$
   La fonction f est donc paire.

   (b) La fonction g est bien dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $g'(x) = \operatorname{ch}(x) - x\operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x) = -x\operatorname{sh}(x)$. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$ sont positives sur $\mathbb{R}_+$ ce qui veut dire que g est strictement décroissante.
   Si $x \geqslant 0$ alors $g(x) \leqslant 0$ mais $g(0) = 0$ soit $g(x) \leqslant 0$.

   (c) La fonction f est paire, on va donc l'étudier sur $\mathbb{R}_+^*$, où elle est une fonction dérivable.
   $$f'(x) = \frac{\operatorname{sh}(x) - x\operatorname{ch}(x)}{(\operatorname{sh}(x))^2} = \frac{g(x)}{(\operatorname{sh}(x))^2}$$
   De la question précédente, on peut déduire que $f'(x) \leqslant 0$. La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et par parité on peut déduire que f est croissante $\mathbb{R}_-^*$.

(d) La courbe représentative de f est ci-dessous



3. **Quelques formules**

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = \left(\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{4} + \dfrac{2\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}}{4} + \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{4} - \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{4} + \dfrac{2\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}}{4} - \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{4} = \dfrac{\mathrm{e}^0}{2} + \dfrac{\mathrm{e}^0}{2} = 1$

(b) $(\mathrm{ch}(x))^2 = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{4} + \dfrac{2\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}}{4} + \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{4} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}}{2}\right) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \mathrm{ch}(2x)\right)$

(c) $(\mathrm{sh}(x))^2 = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{4} - \dfrac{2\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}}{4} + \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{4} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}}{2}\right) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{ch}(2x) - 1\right)$