Exercice 1 (carrée et exponant fractionnaire)

1. $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$; $2\sqrt{2} = 2^{\frac{3}{2}}$;
$\dfrac{2}{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$
2. $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$; $x^{\frac{3}{2}} = x\sqrt{x}$; $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Exercice 2 (Logarithme et exponentielle)

1. $\ln(8) = \ln 2^3 = 3\ln 2$; $\ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln 2$; $\ln 6 - \ln 3 = \ln \dfrac{6}{3} = \ln 2$; $\ln(2e^2) - 2 = \ln 2 + \ln e^2 - 2 = \ln 2$.
2. $\dfrac{e^{x^2}}{e^{2x}} = e^{x^2-2x}$; $e^{x^2} - (e^x)^2 = e^{x^2} - e^{2x}$; $\dfrac{e^{x^2+2x}}{e^{(x+1)^2}} = e^{x^2+2x-(x+1)^2} = e^{-1}$;
$\forall x \in]0\,;+\infty[$,
$\dfrac{\ln(2x)}{\ln x}$ ne peut être simplifiée ; $e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$; $\ln(2x) - \ln x = \ln(\frac{2x}{x}) = \ln 2$; $\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -2\ln x$.
3. $2^x = e^{x\ln 2}$; $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ x^3 = e^{\ln x^3} = e^{3\ln x}$; $x^y = e^{\ln x^y} = e^{y\ln x}$.

Exercice 3 (Comparaisons successives)

1. Soit $x > 0$. On a $1 < 3 \Rightarrow x+1 < x+3 \Rightarrow \frac{1}{x+1} > \frac{1}{x+3}$ (la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$) Donc, en appliquant la racine carrée à cette inégalité portant sur des nombres positifs, on obtient bien $\sqrt{\frac{1}{x+1}} > \sqrt{\frac{1}{x+3}}$
2. Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, cela revient à montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 2x+1 \leqslant (x+1)^2$.
Or, pour tout réel x, on a $(x+1)^2 - (2x+1) = x^2+2x+1-(2x+1) = x^2 \geqslant 0$, donc $2x+1 \leqslant (x+1)^2$.
3. (a) La fonction $x \mapsto (1-x)^2 = x^2-2x+1$ est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$ (voir sens de variation d'un trinôme). Donc $\forall x \in [2\,;4]$, $(1-2)^2 \leqslant (1-x)^2 \leqslant (1-4)^2$, soit $\forall x \in [2\,;4]$, $1 \leqslant (1-x)^2 \leqslant 9$. Par croissance de la fonction exponentielle, on obtient $e \leqslant e^{(1-x)^2} \leqslant e^9$.
   (b) Le tableau de variation de la fonction carrée donne $\forall x \in [-1\,;1],\ 0 \leqslant x^2 \leqslant 1$
   (c) Soit $x \in]0\,;1[$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{\ln(1-x^2)}$. On a $f'(x) = -\dfrac{(\ln(1-x^2))'}{(\ln(1-x^2))^2}$. Comme le dénominateur est positif, le signe de $f'(x)$ est celui de $-(\ln(1-x^2))' = \dfrac{2x}{\ln(1-x^2)}$. Comme $\ln(1-x^2) < 0$ sur $]0\,;1[$, $f'(x) < 0$. Donc f est strictement décroissante sur $]0\,;1[$. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ *(de la forme* $\dfrac{1}{-\infty}$) et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ *(de la forme* $\dfrac{1}{0^-}$). Donc $\forall x \in]0\,;1[,\ \dfrac{1}{\ln(1-x^2)} < 0$.

Exercice 4 (Équations)

1. $\forall x \in \mathbb{R}$,
$\ln(1+e^x) = 2 \Leftrightarrow 1 + e^x = e^2 \Leftrightarrow e^x = e^2 - 1$
$\Leftrightarrow x = \ln(e^2-1)$.
Donc $S = \{\ln(e^2-1)\}$
2. $\forall x \in]0\,;+\infty[$,
$(1+\ln x)^2 = 4 \Leftrightarrow (1+\ln x = -2$ *ou* $1+\ln x = 2) \Leftrightarrow (\ln x = -3$ *ou* $\ln x = 1)$
$\Leftrightarrow (x = e^{-3}$ *ou* $x = e)$
Donc $S = \{e^{-3};\ e\}$
3. $\forall x \in]0\,;+\infty[$,
$\sqrt{1-\ln x} = 2 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 4 \Leftrightarrow \ln x = -3 \Leftrightarrow x = e^{-3}$.
Donc $S = \{e^{-3}\}$
4. $|\ln x| = 1 \Leftrightarrow (\ln x = -1$ *ou* $\ln x = 1)$
$\Leftrightarrow (x = e^{-1}$ *ou* $x = e)$
Donc $S = \{e^{-1};\ e\}$
5. $\forall x \in \mathbb{R}$,
$|e^x| = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
Donc $S = \{0\}$.
6. Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$,
si on pose $X = \ln x$, on a
$(\ln x)^2 + 3\ln x + 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 + 3X + 2 = 0$.
Comme $\Delta = 1$, $X^2 + 3X + 2 = 0$ admet deux

solutions à savoir
$X_1 = \dfrac{-3-1}{2} = -2$ et $X_2 = \dfrac{-3+1}{2} = -1$.
Donc $S = \{\mathrm{e}^{-2}.\ \mathrm{e}^{-1}\}$

7. Pour tout$x \in \mathbb{R}$,
En multipliant les deux membres de l'égalité par e^x et en posant $X = \mathrm{e}^x$, on a
$\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = 2 \Leftrightarrow (\mathrm{e}^x)^2 + 1 = 2\mathrm{e}^x$
$\Leftrightarrow X^2 - 2X + 1 = 0 \Leftrightarrow (X-1)^2 = 0 \Leftrightarrow X = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
Donc $S = \{0\}$.

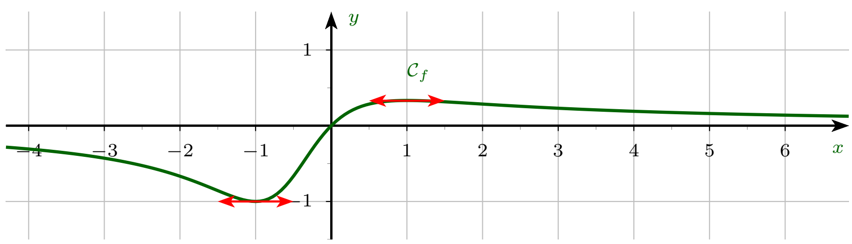
Exercice 5 (Inéquations)

1. $\forall x \in]0\,;+\infty[$,
   $\ln(2x) \leqslant 1 \Leftrightarrow 2x \leqslant \mathrm{e} \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.
   Donc $S =]-\infty\,; \dfrac{\mathrm{e}}{2}]$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.
   Donc $S = \mathbb{R}^*$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $e^{3x-1} \leqslant 1 \Leftrightarrow 3x - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{1}{3}$.
   Donc $S =]-\infty\,; \dfrac{1}{3}]$
4. $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $\dfrac{1}{e^x + 1} < 1 \Leftrightarrow 1 < e^x + 1 \Leftrightarrow 0 < e^x$
   Donc $S = \mathbb{R}$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $2^x \leqslant 3 \Leftrightarrow \ln 2^x \leqslant \ln 3 \Leftrightarrow x \ln 2 \leqslant \ln 3$
   $\Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{\ln 3}{\ln 2}$.
   Donc $S =]-\infty\,; \dfrac{\ln 3}{\ln 2}]$.
6. $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $3^{2x+1} > 1 \Leftrightarrow 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{2}$.
   Donc $S =]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty[$.

Exercice 6 (Etude de fonction)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$. On désigne par $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. $f(x)$ existe si, et seulement si, $x^2 + x + 1 \neq 0$. Or $\Delta < 0$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. f est une fraction , donc dérivable sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. On a $f'(x) = \dfrac{(x^2+x+1) - x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2}$.
   elle est strictement croissante sur $[-1\,;1]$. De plus f' s'annule en -1 et 1, donc les tangentes à $\mathcal{C}_f$ au points d'abscisses -1 et 0 sont horizontales.Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Voici l'allure de $\mathcal{C}_f$:



   On a $f(-1) = -1$ et $f(1) = \dfrac{1}{3}$ donc f n'est ni paire ni impaire.

Exercice 7 (Inégalités et étude de fonction)

1. (a) On pose $f_1(x) = \mathrm{e}^x - (1+x)$ et $f_2(x) = \mathrm{e}^x - (1 + x + \dfrac{x^2}{2})$.
   L'inégalité demandée revient à montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_2(x) \geqslant 0$.
   En effet, la fonction f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f_2'(x) = f_1(x) \geqslant 0$ (par hypothèse) .
   Donc f_2 est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_2(x) \geqslant f_2(0) = 0$.
   Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad e^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

(b) On pose $f_3(x) = \mathrm{e}^x - (1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6})$.
En utilisant la même méthode, montrons que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$, c'est à dire $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_3(x) \geqslant 0$.
En effet, la fonction f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f_3'(x) = f_2(x) \geqslant 0$ (d'après a)) .
Donc f_3 est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_3(x) \geqslant f_3(0) = 0$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ ,\quad e^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$.

(c) Montrons par récurrence que $P(n)$: « $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$ »est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
$P(1)$ est vraie d'après l'hypothèse.
Supposons que pour un entier non nul $n,\ P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.
Pour cela on pose $f_n(x) = \mathrm{e}^x - (1 + x + \cdots + \dfrac{x^n}{n!})$.
On a $f_{n+1}(x) = \mathrm{e}^x - (1 + x + \cdots + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!})$.
La fonction f_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f_{n+1}'(x) = f_n(x) \geqslant 0$ (par hypothèse de récurrence) .
Donc f_{n+1} est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_{n+1}(x) \geqslant f_{n+1}(0) = 0$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \cdots + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = -\dfrac{a}{x^2} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{x^2 - ab}{bx^2}$.
Comme $bx^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $x^2 - ab$, en particulier f' est négative sur $]0\,;\sqrt{ab}]$ et positive sur $[\sqrt{ab}\,;+\infty[$. Donc f est décroissante sur $]0\,;\sqrt{ab}]$ et croissante sur $[\sqrt{ab}\,;+\infty[$.
Donc $\forall x > 0,\quad f(x) \geqslant f(\sqrt{ab})$. Or $f(\sqrt{ab}) = \dfrac{a}{\sqrt{ab}} + \dfrac{\sqrt{ab}}{b} = \sqrt{\dfrac{a}{b}} + \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, soit $\forall x > 0,\quad \dfrac{a}{x} + \dfrac{x}{b} \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Exercice 8 (Inégalités et études de fonction)

Soit f définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. On a

$$\begin{aligned}
f(-x) &= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-x}}{e^{2x}(1+\mathrm{e}^{-x})^2} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{x}}{(e^{x}(1+\mathrm{e}^{-x}))^2} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2} \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Donc f est paire.

3. f est dérivable comme composée de fonctions dérivables et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)^2 - \mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x))}{(1+\mathrm{e}^x)^4} \\
&= \frac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x) - \mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^3} (\text{ simplification par } 1+\mathrm{e}^x \text{ }) \\
&= \frac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^3} (\text{ factorisation par } \mathrm{e}^x \text{ })
\end{aligned}$$

4. Le signe de $f'(x)$ est celui de $1-\mathrm{e}^x$ car $\dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^3} > 0$. Donc f' est positive sur $]-\infty\,;0]$ et négative sur $[0\,;+\infty[$. D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	

5. On a $\forall x \in [0,+\infty[,\ f'(x) \leqslant 0$ d'après 4). Montrons que $\forall x \in [0,+\infty[,\ -\frac{1}{3} \leqslant f'(x)$. En effet, pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x)+\frac{1}{3} &= \frac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^3}+\frac{1}{3} \\ &= \frac{3\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)+(1+\mathrm{e}^x)^3}{3(1+\mathrm{e}^x)^3} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{3x}+6\mathrm{e}^x+1}{3(1+\mathrm{e}^x)^3}. \end{aligned}$$

Comme exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$, $f'(x)+\frac{1}{3} \geqslant 0$.
Donc $\forall x \in [0,+\infty[,\ -\frac{1}{3} \leqslant f'(x) \leqslant 0$.

6. Montrons que $\forall x \in [0,+\infty[,\ -\frac{1}{3}x+\frac{1}{4} \leq f(x)$. On pose, pour tout $x \in [0,+\infty[,\ g(x) = f(x)-(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{4})$. On a $\forall x \in [0,+\infty[, g'(x) = f'(x)-(-\frac{1}{3}) \geqslant 0$, d'après 5). Donc g est croissante sur $[0,+\infty[$ et on a $\forall x \in [0,+\infty[,\ g(x) \geqslant g(0) = 0$. Donc $\forall x \in [0,+\infty[,\ -\frac{1}{3}x+\frac{1}{4} \leq f(x)$.

Exercice 9 (Bijection)

Soit th la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$

1. Montrons que $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$. En effet, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} &= \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1} \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$.

2. Résolvons l'équation $\mathrm{th}(x) = y$ en fonction des valeurs de y.
Tout d'abord, montrons que $\mathrm{th}(x) = y \Rightarrow y \in\,]-1\,;1[$.
En effet ; comme $-\mathrm{e}^{2x}-1 < \mathrm{e}^{2x}-1 < \mathrm{e}^{2x}+1$, en divisant les deux membres de cette inégalité par $\mathrm{e}^{2x}+1$ on obtient $-1 < y < 1$.

Pour tout $y \in]-1\,;1[$ on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{th}(x) = y &\Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = y \\
&\Leftrightarrow e^{2x} - 1 = y(e^{2x}+1) \\
&\Leftrightarrow e^{2x} - 1 = ye^{2x} + y \\
&\Leftrightarrow e^{2x} - ye^{2x} = 1 + y \\
&\Leftrightarrow e^{2x}(1-y) = 1 + y \\
&\Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \\
&\Leftrightarrow 2x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \\
&\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)
\end{aligned}$$

3. D'après 2), $\forall y \in]-1\,;1[,\ \exists! x \in \mathbb{R},\ y = \operatorname{th}(x)$. Donc th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,;1[$.

Exercice 13 (Adapté d'Ecricome 2003) (en DL à rendre le mardi 22)

On définit les fonctions *ch* et *sh* par : $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Soit alors f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sh}(x)}$

1. **Étude des fonctions** sh **et** ch
   (a) Quels sont les ensembles de définition de ch et sh ?
   (b) Étudier la parité de ch et sh.
   (c) Étudier les variations de sh sur $\mathbb{R}$ puis déduire son signe sur $\mathbb{R}$.
   (d) Étudier les variations de ch.
   (e) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) > \operatorname{sh}(x)$.
   (f) Tracer sur un même graphique les allures de ch et sh.
2. **Étude de la fonction** f
   (a) Donner l'ensemble de définition de f puis étudier sa parité.
   (b) On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = \operatorname{sh}(x) - x\operatorname{ch}(x)$. Étudier les variations de g puis déduire son signe.
   (c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   (d) En tenant compte de toutes les informations à votre disposition, tracer l'allure de la courbe de f sur $\mathbb{R}$.
3. **Quelques formules**
   (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.
   (b) Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) = \operatorname{ch}(a+b)$.