

Exercice 1 (Relation entre coefficients et racines)

- Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré possédant deux racines réelles x_1 et x_2 (pas nécessairement distinctes).
 - En utilisant la forme factorisée du polynôme P , puis en développant l'expression obtenue, exprimer $x_1 + x_2$ et x_1x_2 en fonction de a , b et c .
 - Réciproquement, soient x_1 et x_2 deux nombres réels. Montrer que x_1 et x_2 sont les racines du polynôme $P(x) = x^2 - sx + p$, où $s = x_1 + x_2$ et $p = x_1x_2$.
- On considère l'équation $2x^2 - 5x + 3 = 0$.
 - Trouver une solution évidente.
 - Combien vaut la somme et le produit des solutions ?
 - En déduire l'autre solution.
- Trouver, s'ils existent, deux nombres dont la somme est 6 et le produit est 1.
- Déterminer l'âge de Marc et Sophie sachant que Marc est le plus âgé, que la somme de leurs âges est 28 et le produit de leurs âges est égal à 192.

Exercice 2 (division euclidienne)

- Effectuer la division euclidienne de :
 - $X^3 - 2X^2 + 3X - 2$ par $X + 1$
 - $X^3 + 3X^2 - 2$ par $X^2 - 4x + 4$
 - $2X^4 - X^3 + 3X - 5$ par $X^2 - 1$
- Soit $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.
 - Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \neq b$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.
 - Soient $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.
Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.
 - En déduire le reste de la division euclidienne des polynômes de la question 1).

Exercice 3 (Identification et calcul de somme)

- Trouver des réels a et b tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{k(k+1)} + \frac{b}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$
- Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ en utilisant la méthode de la somme télescopique.

Exercice 4 (Factorisation et étude de fonctions)

- Factoriser le polynôme $P(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.
 - Donner les domaines de définition des fonctions $\frac{1}{P}$ et $\ln(P)$.
 - Étudier les variations de la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$.
 - Résoudre l'équation $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5 \ln x + 6 = 0$.
- Factoriser le polynôme $P(X) = -4X^3 - 6X^2 - 4X - 2$.
 - Donner les domaines de définition de la fonction \sqrt{P} .
 - Étudier les variations de la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x$.
 - Résoudre l'équation $-4e^{2x} - 6e^x - 4 - 2e^{-x} = 0$.

Exercice 5 (équation fonctionnelle)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) = P(X)$. Supposons de plus que P a au moins une racine $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha + n$ est une racine de P .
- Déduire l'ensemble des polynômes P vérifiant ces hypothèses.

Exercice 6 (polynômes pairs, impairs)

Un polynôme est *pair* (resp. *impair*) si la fonction définie sur \mathbb{R} par $P : x \mapsto P(x)$ est *paire* (resp. *impaire*).

- Déterminer tous les polynômes pairs de $\mathbb{R}_2[X]$
On procédera par identification entre $P(X) - P(-X)$ et le polynôme nul.
- Déterminer tous les polynômes impairs de $\mathbb{R}_2[X]$
- Peut-on généraliser aux polynômes de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 7 (Racines multiples d'un polynôme)

On veut démontrer le résultat évoqué dans la remarque 3 du cours.

- Déterminer l'ensemble des polynômes P de degré 2 tels que $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2 et $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X - 1)^2 Q(X)$. Montrer que $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2 tel que $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X - 1)^2 Q(X)$.
- Généraliser ce résultat au maximum et prouver si possible votre affirmation.

Exercice 8 (division euclidienne et matrices)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- Calculer $A^2 - 3A + 2I$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
- Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
- En déduire l'expression de la matrice A^n .

Exercice 9 () (polynôme et racines)**

Soient a, b, c nombres réels non nuls et distincts.

Soit P le polynôme P défini par :

$$P = \frac{X(X-b)(X-c)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{X(X-c)(X-a)}{b(b-c)(b-a)} + \frac{X(X-a)(X-b)}{c(c-a)(c-b)}$$

- Montrer que a, b et c sont des racines de $P(X) - 1$.
- Montrer que $P(X)$ peut s'écrire sous la forme $P(X) = \lambda(X-a)(X-b)(X-c) + 1$ où λ est une constante que l'on déterminera.

Exercice 10 (*)**

Résoudre les équations suivantes :

- $Q^2 = XP^2$ d'inconnues $P, Q \in \mathbb{R}[X]$
- $P \circ P = P$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 11 (*)**

Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice 12 (*)**

Soit $P(X) = 2X^4 + 3X^3 - X^2 + 3X + 2$. On pose $Y = X + \frac{1}{X}$.

- Montrer qu'il existe un polynôme Q de degré 2 tel que $Q(Y) = \frac{P(X)}{X^2}$.
- Calculer les racines de Q .
- En déduire les racines de P et sa factorisation.