Exercice 1(Relation entre coefficients et racines)

1. Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré possédant deux racines réelles x_1 et x_2 (pas nécessairement distinctes).
   (a) En utilisant la forme factorisée du polynôme P, puis en développant l'expression obtenue, exprimer $x_1 + x_2$ et $x_1 x_2$ en fonction de $a\, b$ et c.
   (b) Réciproquement, soient x_1 et x_2 deux nombres réels. Montrer que x_1 et x_2 sont les racines du polynôme $P(x) = x^2 - sx + p$, où $s = x_1 + x_2$ et $p = x_1 x_2$.
2. On considère l'équation $2x^2 - 5x + 3 = 0$.
   (a) Trouver une solution évidente.
   (b) Combien vaut la somme et le produit des solutions ?
   (c) En déduire l'autre solution.
3. Trouver, s'ils existent, deux nombres dont la somme est 6 et le produit est 1.
4. Déterminer l'âge de Marc et Sophie sachant que Marc est le plus âgé, que la somme de leurs âges est 28 et le produit de leurs âges est égal à 192.

Exercice 2(division euclidienne)

1. Effectuer la division euclidienne de :
   (a) $X^3 - 2X^2 + 3X - 2$ par $X + 1$
   (b) $X^3 + 3X^2 - 2$ par $X^2 - 4x + 4$
   (c) $2X^4 - X^3 + 3X - 5$ par $X^2 - 1$
2. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.
   (b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \neq b$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.
   (c) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.
   Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.
   (d) En déduire le reste de la division euclidien des polynômes de la question 1) .

Exercice 3(Identification et calcul de somme)

1. Trouver des réels a et b tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad \dfrac{a}{k(k+1)} + \dfrac{b}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ en utilisant la méthode de la somme télescopique.

Exercice 4 (Factorisation et étude de fonctions)

1. (a) Factoriser le polynôme $P(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.
   (b) Donner les domaines de définition des fonctions $\frac{1}{P}$ et $\ln(P)$.
   (c) Étudier les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$.
   (d) Résoudre l'équation $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 = 0$.
2. (a) Factoriser le polynôme $P(X) = -4X^3 - 6X^2 - 4X - 2$.
   (b) Donner les domaines de définition de la fonction $\sqrt{P}$.
   (c) Étudier les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x$.
   (d) Résoudre l'équation $-4e^{2x} - 6e^x - 4 - 2e^{-x} = 0$.

Exercice 5 (équation fonctionnelle)

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X + 1) = P(X)$. Supposons de plus que P a au moins une racine $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha + n$ est une racine de P.
   (b) Déduire l'ensemble des polynômes P vérifiant ces hypothèses.
2. Déterminer tous les polynômes P tels que $P(X + 1) = P(X)$.

Exercice 6 (polynômes pairs, impairs)

Un polynôme est *pair* (resp. *impair*) si la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $P : x \mapsto P(x)$ est *paire* (resp. *impaire*).

1. Déterminer tous les polynômes pairs de $\mathbb{R}_2[X]$
   On procèdera par identification entre $P(X) - P(-X)$ et le polynôme nul.
2. Déterminer tous les polynômes impairs de $\mathbb{R}_2[X]$
3. Peut-on généraliser aux polynômes de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 7(Racines multiples d'un polynôme)

On veut démontrer le résultat évoqué dans la remarque 3 du cours.

1. Déterminer l'ensemble des polynômes P de degré 2 tels que $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2 et $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X-1)^2Q(X)$. Montrer que $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2 tel que $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X-1)^2Q(X)$.
4. Généraliser ce résultat au maximum et prouver si possible votre affirmation.

Exercice 8 (division euclidienne et matrices)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Pour $n \geqslant 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3. En déduire l'expression de la matrice A^n.

Exercice 9 (**) (polynôme et racines)

Soient a, b, c nombres réels non nuls et distincts.
Soit P le polynôme P défini par :

$$P = \frac{X(X-b)(X-c)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{X(X-c)(X-a)}{b(b-c)(b-a)} + \frac{X(X-a)(X-b)}{c(c-a)(c-b)}$$

1. Montrer que a, b et c sont des racines de $P(X) - 1$.
2. Montrer que $P(X)$ peut s'écrire sous la forme $P(X) = \lambda(X-a)(X-b)(X-c) + 1$ où λ est une constante que l'on déterminera.

Exercice 10 (***)

Résoudre les équations suivantes :

1. $Q^2 = XP^2$ d'inconnues $P, Q \in \mathbb{R}[X]$
2. $P \circ P = P$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 11 (***)

Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

Exercice 12 (***)

Soit $P(X) = 2X^4 + 3X^3 - X^2 + 3X + 2$. On pose $Y = X + \dfrac{1}{X}$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme Q de degré 2 tel que $Q(Y) = \dfrac{P(X)}{X^2}$.
2. Calculer les racines de Q.
3. En déduire les racines de P et sa factorisation.