

Exercice 1

- a) la fonction f est constante
- b) la fonction f ne peut s'annuler qu'en 0 (mais n'y est pas forcée de s'y annuler)
- c) la fonction f prend toute valeur réelle
- d) la fonction f est croissante
- e) la fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.

Exercice 2

- a) $[0; 1[$
- b) $]3; 4[\cup]4; 5[$
- c) $\{4\}$
- d) $] -\infty; 0] \cup [2; +\infty[$

Exercice 3

- a) $\exists x \in I, f(x) = 0.$
- b) $\forall x \in I, f(x) = 0$
- c) $\exists(x, y), f(x) \neq f(y).$
- d) $\forall x, y \in I, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
ou $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
- e) $\exists a \in I, \forall x \in I, f(x) \geq f(a)$
- f) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) > M$
- g) $\forall(x, y) \in I^2, f(x) = 0 \text{ et } f(y) = 0 \Rightarrow x = y.$

Exercice 4

- a) $\exists x \in I, f(x) = 0$
- b) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \neq y$
- c) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I, |f(x)| > M$
- d) $\exists x, y \in I, x \leq y \text{ et } f(x) > f(y)$
- e) $\exists x, y \in I, f(x) = f(y) \text{ et } x \neq y$
- f) $\exists x \in I, f(x) > 0 \text{ et } x > 0.$

Exercice 5

- a) d) et e) sont les seules assertions exactes.

Exercice 6

Soit $x \in \mathbb{Q}$. Si par l'absurde $y = x + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ alors $\sqrt{2} = y - x \in \mathbb{Q}$, ceci est impossible. Donc $x + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 7

Par disjonction des cas :

Cas n pair : on peut écrire $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$ et alors $\frac{n(n^2 + 1)}{2} = p(n^2 + 1) \in \mathbb{N}$

Cas n impair : on peut écrire $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$ et alors $\frac{n(n^2 + 1)}{2} = n(2p^2 + 2p + 1) \in \mathbb{N}$

Dans les deux cas la propriété est vraie.

Exercice 8

On note (E) l'équation

$$mx^2 - 2(m+1)x + m - 1 = 0.$$

Cas où $m = 0$. (E) devient $-2x - 1 = 0$. Dans ce cas (E) admet une seule solution $x = -\frac{1}{2}$

Cas où $m \neq 0$.

(E) est une équation du second degré avec $\Delta = 12m + 4$.

On a :

$\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in \left] -\frac{1}{3}; 0[\cup]0; +\infty[$. Dans ce cas (E) admet deux solutions.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}$.

Dans ce cas (E) admet une unique solution.

$\Delta < 0 \Leftrightarrow m \in \left] -\infty; -\frac{1}{3} \right[$.

Dans ce cas (E) n'admet de solution.

Exercice 9

- a) Supposons $\forall \varepsilon \geq 0, |a| \leq \varepsilon$.

En particulier, pour $\varepsilon = 0$, on a $|a| \leq 0$ donc $a = 0$.

- b) Par contraposée, montrons :

$a \neq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0, |a| > \varepsilon$.

Supposons $a \neq 0$. Pour $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ on a $\varepsilon > 0$ et $|a| > \varepsilon$ ce qui détermine un ε convenable.

Exercice 10

On peut écrire : a), c), e).

Exercice 11

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cap C) &= A \cap \overline{B \cap C} \\ &= A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) \\ &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \end{aligned}$$

Exercice 12

$$\begin{aligned} \overline{A \setminus B} &= \overline{A \cap \overline{B}} \\ &= \overline{A} \cap B \\ &= B \cap \overline{A} \\ &= B \setminus A \end{aligned}$$

Exercice 13

a) ($\Rightarrow$) Supposons $A \subset B$.

On a toujours $B \subset A \cup B$. De plus

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \\ &\Rightarrow x \in B (\text{car } A \subset B) \end{aligned}$$

Donc $A \cup B \subset B$. Ainsi $A \cup B = B$.

($\Leftarrow$) Supposons $A \cup B = B$. Puisque $A \subset A \cup B$, on a $A \subset B$.

b) ($\Rightarrow$) Supposons $A = B$. On a $A \cap B = A = A \cup B$.

($\Leftarrow$) Supposons $A \cap B = A \cup B$. On a $A \subset A \cup B = A \cap B \subset B$ et de même $B \subset A$ donc $A = B$.

c) ($\Rightarrow$) Supposons $A \cup B = A \cap C$. On a $B \subset A \cup B = A \cap C \subset A \subset A \cup B = A \cap C \subset C$.

($\Leftarrow$) Supposons $B \subset A \subset C$. Alors $A \cup B = A = A \cap C$.

d) ($\Rightarrow$) Supposons $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. On a $B \subset A \cup B = A \cup C$, donc $B = B \cap (A \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C) = (A \cap C) \cup (B \cap C) = C \cap (A \cup B) = C \cap (A \cup C) = C$.

Donc $B = C$.

($\Leftarrow$) Si $B = C$ on a clairement $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$.

Exercice 14

- f est bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a/c\}$ car le dénominateur ne s'y annule pas.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{a}{c} &\Leftrightarrow (ax + b)c = a(cx - a) \\ &\Leftrightarrow a^2 + bc = 0 \end{aligned}$$

qui est exclu, donc f est à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \{a/c\}$.

- On a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a/c\}$:

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) &= \frac{af(x) + b}{cf(x) - a} \\ &= \frac{a \frac{ax+b}{cx-a} + b}{c \frac{ax+b}{cx-a} - a} \\ &= \frac{a(ax+b) + b(cx-a)}{c(ax+b) - a(cx-a)} \\ &= \frac{(a^2 + bc)x}{a^2 + bc} \\ &= x \end{aligned}$$

Puisque $f \circ f = Id$, f est une bijection et $f^{-1} = f$

Exercice 15

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si n est pair alors $f(n) = \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$

et si n est impair alors $\frac{n+1}{2} \in \mathbb{N}$.

Dans les deux cas $f(n) \in \mathbb{Z}$. Soit $(n, n') \in \mathbb{N}^2$. Supposons $f(n) = f(n')$.

Compte tenu de la remarque précédente, n et n' ont nécessairement même parité.

Si n et n' sont pairs alors $\frac{n}{2} = \frac{n'}{2}$ donc $n = n'$.

Si n et n' sont impairs alors $-\frac{n+1}{2} = -\frac{n'+1}{2}$ donc $n = n'$.

Ainsi f est injective.

Soit $m \in \mathbb{Z}$. Si $m \geq 0$ alors pour $n = 2m \in \mathbb{N}$ on a $f(n) = \frac{2m}{2} = m$.

Si $m < 0$ alors pour $n = -2m - 1 \in \mathbb{N}$ on a $f(n) = \frac{2m}{2} = m$.

Ainsi f est surjective.

Finalement f est bijective.

Exercice 16

a) Supposons $g \circ f$ injective. Soient $(x, x') \in E^2$.

Si $f(x) = f(x')$ alors $g(f(x)) = g(f(x'))$. Or $g \circ f$ est injective, donc $x = x'$.

Ainsi f injective.

b) Supposons $g \circ f$ surjective.

Soit $z \in G$. Il existe $x \in E$ tel que $z = g(f(x))$. Pour $y = f(x) \in F$, on a $g(y) = z$. Ainsi g surjective.

c) Supposons $g \circ f$ injective et f surjective.

Soit $(y, y') \in F^2$, tel que $g(y) = g(y')$. Montrons que $y = y'$. En effet, comme f est surjective $\exists (x, x') \in E^2$ tel que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. On alors $g(f(x)) = g(f(x'))$. Or $g \circ f$ est injective, d'où $x = x'$. Donc $f(x) = f(x')$, soit $y = y'$. Donc g est injective.

d) Supposons $g \circ f$ surjective et g injective. Soit $y \in F$. Montrons qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

En effet, comme $g(y) \in G$ et $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $g(y) = g \circ f(x) = g(f(x))$. Or g est injective, d'où $y = f(x)$.

Exercice 17

- $\exp(\mathbb{R}) =]0; +\infty[$.

- L'intervalle $[2, 7]$ est l'image par la fonction carrée des intervalles $[-\sqrt{7}; -\sqrt{2}]$ et $[\sqrt{2}; \sqrt{7}]$

Exercice 18

1. f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 2]$ (voir trinôme chapitre 1). Donc f réalise une bijection de $]-\infty; 2]$ sur $f(]-\infty; 2]) = [-1; +\infty[= J$. Soit $y \in J$, déterminons $f^{-1}(y)$ c'est à dire $x \in]-\infty; 2]$ tel que $f(x) = y$.

On a :

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - y = 0$$

$\Delta = 16 - 4(3 - y) = 4(1 + y) \geq 0$ car $y \in J$. Comme $x \in I$, on a $x = \frac{4 - \sqrt{\Delta}}{2} = 2 - \sqrt{1 + y}$. Donc $f^{-1}(y) = 2 - \sqrt{1 + y}$. Finalement f^{-1} est l'application définie sur J par $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{1 + x}$.

2. f est continue et strictement croissante sur I car f est une fraction et $f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$. Donc f réalise une bijection de I sur $f(I) =]-\infty; 2[= J$ (faites un tableau de variations pour illustrer cela).

Soit $y \in J$, déterminons $f^{-1}(y)$ c'est à dire $x \in I$ tel que $f(x) = y$.

On a :

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow y = \frac{2x-1}{x+2} \\ &\Leftrightarrow y(x+2) = (2x-1) \\ &\Leftrightarrow 2y+1 = 2x-xy \\ &\Leftrightarrow 2y+1 = x(-y+2) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{-y+2} \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(y) = \frac{2y+1}{-y+2}$. Finalement f^{-1} est l'application définie sur J par $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{-x+2}$.

3. f est continue et strictement croissante sur I par composition de fonctions croissantes ou par dérivation. Donc f réalise une bijection de I sur $f(I) = [-1; +\infty[= J$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow y = \sqrt{2x+3} - 1 \\ &\Leftrightarrow y+1 = \sqrt{2x+3} \\ &\Leftrightarrow (y+1)^2 = 2x+3 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{(y+1)^2 - 3}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2} + y - 1 \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(y) = \frac{y^2}{2} + y - 1$. Finalement f^{-1} est l'application définie sur J par $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{2} + x - 1$.

4. Sur $]-\infty; 0]$, $f(x) = \frac{x}{1-x}$ et sur $]0; +\infty[$, $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Comme dans 2), on montre que f est continue, strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et $f(]-\infty; 0]) =]-1; 0]$. Donc $\forall y \in]-1; 0]$, $\exists! x \in]-\infty; 0]$, $f(x) = y$. De même f est continue, strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $f(]0; +\infty[) =]0; 1[$. Donc $\forall y \in]0; 1[$, $\exists! x \in]0; +\infty[$, $f(x) = y$. On pose $J =]-1; 1[$.

Montrons que $\forall y \in J$, $\exists! x \in I$, $f(x) = y$.

En effet, si $y \in]-1; 0]$, l'égalité $f(x) = y$ impose à x d'être dans $]-\infty; 0]$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow y = \frac{x}{1-x} \\ &\Leftrightarrow y(1-x) = x \\ &\Leftrightarrow y = xy + x \\ &\Leftrightarrow y = x(y+1) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y}{y+1} \end{aligned}$$

Si $y \in]0; 1[$, l'égalité $f(x) = y$ impose à x d'être dans $]0; +\infty[$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow y = \frac{x}{1+x} \\ &\Leftrightarrow y(1+x) = x \\ &\Leftrightarrow y = -xy + x \\ &\Leftrightarrow y = x(-y+1) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y}{-y+1} \end{aligned}$$

Dans les deux cas on a $x = \frac{y}{-|y|+1}$. Donc f réalise une bijection de I sur J et $\forall x \in J$, $f^{-1}(x) = \frac{x}{-|x|+1}$.