Exercice 1(Relation entre coefficients et racines)

1. Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré possédant deux racines réelles x_1 et x_2 (pas nécessairement distinctes).
   (a) En utilisant l'expression factorisée de P et en la développant on a $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$. Par identification des coefficients de P on a $b = -a((x_1 + x_2)$ et $c = ax_1x_2$. Donc $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$
   (b) Réciproquement, soient x_1 et x_2 deux nombres réels. Montrer que x_1 et x_2 sont les racines du polynôme $P(x) = x^2 - sx + p$, où $s = x_1 + x_2$ et $p = x_1x_2$.
   On a $\Delta = s^2 - 4p = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2$.
   Donc les racines de P sont $\dfrac{x_1 + x_2 + x_1 - x_2}{2} = x_1$ et $\dfrac{x_1 + x_2 - (x_1 - x_2)}{2} = x_2$.
2. On considère l'équation $2x^2 - 5x + 3 = 0$.
   (a) $x_1 = 1$ est une racine évidente de P.
   (b) On a, d'après 1), $x_1 + x_2 = \dfrac{5}{2}$ et $x_1x_2 = \dfrac{3}{2}$
   (c) En utilisant l'une des égalité ci-dessus, par exemple la deuxième, on obtient $x_2 = \dfrac{3}{2}$.
3. Montrons qu'ils existent deux nombres dont la somme est 6 et le produit est 1. Les deux nombre existent si, et seulement si, le polynôme $P(X) = X^2 - 6X + 1$ admet deux racines (pas nécessairement distinctes), c'est à dire $\Delta \geqslant 0$. Ceci est vrai car $\Delta = 32$.
4. Déterminons l'âge de Marc et Sophie sachant que Marc est le plus âgé, que la somme de leurs âges est 28 et le produit de leurs âges est égal à 192. On considère l'équation $x^2 - 28x + 192 = 0$.
   $\Delta = 28^2 - 4 \times 192 = 4^2 \times 7^2 - 4^2 \times 48 = 4^2(7^2 - 48) = 16$. Donc $x_1 = \dfrac{28 - 4}{2} = 12$ et $x_2 = \dfrac{28 + 4}{2} = 16$.
   donc Marc a 16 ans et Sophie en a 12 car Marc est le plus âgé.

Exercice 2(division euclidienne)

1. Dans toute la suite,on notera $Q(X)$ et $R(X)$ respectivement le quotient et le reste des divisions euclidiennes.
   (a) $Q(X) = X^2 - 3X + 6$ et $R(X) = -8$.
   (b) $Q(X) = X^2 - 4X + 4$ et $R(X) = 24X - 30$.
   (c) $Q(X) = 2X^2 - X + 2$ et $R(X) = 2X - 3$.
2. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)$ en fonction de $P(a)$. En effectuant la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-a)$ on obtient $P(X) = Q(X)(X-a)+K$ avec $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $K \in \mathbb{R}$. En évaluant P en a on obtient $K = P(a)$. $R(X) = P(a)$.
   (b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \neq b$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimons le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$. En effectuant la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - a)(X - b)$ on obtient $P(X) = Q(X)(X - a)(X - b) + \alpha X + \beta$ avec $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^2$. En évaluant P en a et en b, on obtient $a\alpha + \beta = P(a)$ et $b\alpha + \beta = P(b)$.
   Donc $R(X) = \alpha X + \beta$ avec $\alpha = \dfrac{P(b) - P(a)}{b - a}$ et $\beta = \dfrac{bP(a) - aP(b)}{b - a}$.
   (c) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.
   Exprimons le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$. En effectuant la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - a)^2$ on obtient $P(X) = Q(X)(X - a)^2 + \alpha X + \beta$ avec $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^2$. On a $P'(X) = 2(x - a)Q(X) + (X - a)^2Q(X)' + \alpha$. En évaluant P et P' en a, on obtient $a\alpha + \beta = P(a)$ et $\alpha = P'(a)$.
   Donc $R(X) = \alpha X + \beta$ avec $\alpha = P'(a)$ et $\beta = P(a) - aP'(a)$.
   (d) En déduire le reste de la division euclidien des polynômes de la question 1) . Pour 1)a) on utilise 2)a) pour $a = -1$ on obtient $R(X) = P(-1) = -8$.
   Pour 1)b) on utilise 2)c) pour $a = 2$, on obtient $R(X) = 24X - 30$.
   Pour 1)c) on utilise 2)b) pour $a = -1$ et $b = 1$, on obtient $R(X) = 2X - 3$.

Exercice 3(Identification et calcul de somme)

1. On a d'une part

$$\frac{a}{k(k+1)}+\frac{b}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{a(k+2)+bk}{k(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{(a+b)k+2a}{k(k+1)(k+2)},$$

et d'autre part $\dfrac{a}{k(k+1)}+\dfrac{b}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$
d'où $a+b=0$ et $2a=1$, soit $a=\dfrac{1}{2}$ et $b=-\dfrac{1}{2}$.

2. On a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k(k+1)}-\frac{1}{2(k+1)(k+2)}\right) \text{ (d'après 1))}$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)} \text{ (téléscopage)}$$

Exercice 4 (Factorisation et étude de fonctions)

1. (a) Factorisons le polynôme $P(X)=X^3-2X^2-5X+6$. Comme 1 est une racine évidente de P, $P(X)$ se factorise par $X-1$. En effectuant la division euclidienne de $P(X)$ par $X-1$ on obtient $P(X)=(X-1)(X^2-X-6)$. Or $X^2-X-6=(X+2)(X-3)$ (avec le discriminant),donc $P(X)=(X-1)(X+2)(X-3)$.

   (b) $\dfrac{1}{P(x)}$ existe si, et seulement si, $P(x)\neq 0$. Donc $\mathcal{D}_{\frac{1}{P}}=\mathbb{R}\backslash\{-2,\ 1,\ 3\}$.
   $\ln P(x)$ existe si, et seulement si, $P(x)>0$. Donc $\mathcal{D}_{\ln P}=]-2\,;1[\cup]3\,;+\infty[$.

   (c) Étudier les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x-1$.
   On a $f'(x)=P(X)$. Donc f est strictement croissante sur $[-2\,;1]$ et $[3\,;+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty\,;-2]$ et $[1\,;3]$

   (d) On a $(\ln x)^3-2(\ln x)^2-5\ln x+6=0\Leftrightarrow P(\ln x)=0\Leftrightarrow \ln x\in\{-2,\ 1,\ 3\}$.
   Donc $S=\{\mathrm{e}^{-2},\ \mathrm{e},\ \mathrm{e}^3\}$

2. (a) Factorisons le polynôme $P(X)=-4X^3-6X^2-4X-2$. Comme -1 est une racine évidente de P, $P(X)$ se factorise par $X+1$. En effectuant la division euclidienne de $P(X)$ par $X+1$ on obtient $P(X)=(X+1)(-4X^2-2X-2)=-2(X+1)(2X^2+X+1)$. Or $2X^2+X+1$ est strictement positif car le discriminant est strictement négatif,donc la factorisation de $P(X)$, est $P(X)=-2(X+1)(2X^2+X+1)$.

   (b) $\sqrt{P(x)}$ existe si, et seulement si, $P(x)\geqslant 0$. Or le signe de $P(x)$ est celui de $-2(X+1)$ d'après 2.a). Donc $\mathcal{D}_{\sqrt{P}}=]-\infty\,;-1]$.

   (c) Étudions les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^4-2x^3-2x^2-2x$.

   On a $f'(x)=P(X)$. Donc f est strictement croissante sur $]-\infty\,;-1]$ et strictement décroissante sur $[-1\,;+\infty[$.

   (d) On a $-4e^{2x}-6e^x-4-2e^{-x}=e^{-x}P(\mathrm{e}^x)$. Donc $-4e^{2x}-6e^x-4-2e^{-x}\Leftrightarrow e^{-x}P(\mathrm{e}^x)=0\Leftrightarrow P(e^x)=0\Leftrightarrow \mathrm{e}^x=-1$ ceci est impossible. Donc $S=\emptyset$.

Exercice 5 (équation fonctionnelle)

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1)=P(X)$. Supposons de plus que P a au moins une racine $\alpha\in\mathbb{R}$.

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(\alpha+n)=0$.
   On a $P(\alpha+0)=P(\alpha)=0$
   Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N},\ P(\alpha+n)=0$. Montrons que $P(\alpha+n+1)=0$.
   En effet,
$$\begin{aligned} P(\alpha+n+1) &= P(\alpha+n) \ \textit{car}\ P(X+1)=P(X) \\ &= 0 \ \textit{d'après l'hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$
   Donc pour tout $n \in \mathbb{N},\ P(\alpha+n)=0$.
2. D'après 1) P admet une infinité de racines, donc $P=0$.

Exercice 6 (polynômes pairs, impairs)

Soit $P(X)=aX^2+bX+c$ avec $(a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3$. On a
$$\begin{aligned} P(X)-P(-X) &= aX^2+bX+c-(a(-X)^2+b(-X)+c) \\ &= 2bX \end{aligned}$$

1. Si P est pair $P(X)-P(-X)=0$. Or, d'après ce qui précède $P(X)=2bX$.
   Donc $P(X)-P(-X)=0 \Leftrightarrow b=0$ (identification des coefficients). Donc les polynômes pairs de $\mathbb{R}_2[X]$ sont ceux qui s'écrivent sous la forme $P(X)=aX^2+c$ où $(a,\ c) \in \mathbb{R}^2$.
   On a procédé par identification entre $P(X)-P(-X)$ et le polynôme nul.
2. Si P est pair $P(X)-P(-X)=2P(X)=2aX^2+2bX+2c$.Or, d'après ce qui précède $P(X)=2bX$.
   Donc $P(X)-P(-X)=2aX^2+2bX+2c \Leftrightarrow a=c=0$ (identification des coefficients).
   Donc les polynômes impairs de $\mathbb{R}_2[X]$ sont ceux qui s'écrivent sous la forme $P(X)=bX$ où $b \in \mathbb{R}$.
3. **Cas général :** Soient $P \in \mathbb{R}[X]$. P s'écrit sous la forme $P(X)=\sum_{i=0}^{n} a_iX^i$ où $n \in \mathbb{N}$. On a
$$\begin{aligned} P(X)-P(-X) &= \sum_{i=0}^{n} a_iX^i - \sum_{i=0}^{n} a_i(-X)^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i(X^i-(-X)^i) \\ &= \sum_{i\in I} 2a_iX^i \end{aligned}$$
   où I est l'ensemble des indices impairs.
   (a) Si P est pair alors $P(X)-P(-X)=0$. Or $P(X)=\sum_{i\in I} 2a_iX^i$.
   Donc $P(X)-P(-X)=0 \Leftrightarrow \forall i \in I$ (identification des coefficients). Donc les polynômes pairs de $\mathbb{R}[X]$ sont ceux qui s'écrivent sous la forme $P(X)=\sum_{k=0}^{m} a_{2k}X^{2k}$ où $m \in \mathbb{N}$.
   (b) Si P est impair alors $P(X)-P(-X)=2P(X)=\sum_{i=0}^{n} 2a_iX^i$. Or $P(X)=\sum_{i\in I} 2a_iX^i$.
   Donc $P(X)-P(-X)=2P(X) \Leftrightarrow \forall i \in [\![0\,;n]\!]\backslash I,\ a_i=0$ (identification des coefficients). Donc les polynômes impairs de $\mathbb{R}[X]$ sont ceux qui s'écrivent sous la forme $P(X)=\sum_{k=0}^{m} a_{2k+1}X^{2k+1}$ où $m \in \mathbb{N}$.

Exercice 7(Racines multiples d'un polynôme)

1. Soit P un polynômes P de degré 2 tels que $P(1)=0$ et $P'(1)=0$.
   On a $P(X)=aX^2+bX+c$ et $P'(X)=2aX+b$ avec $a \neq 0$. Comme $P(1)=P'(1)=0$, on a : $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 2a+b=0 \end{cases}$.

Donc $b = -2a$ et $c = a$ (à vérifier par le lecteur) et alors P est de la forme : $P(X) = a(X-1)^2$ avec $a \in \mathbb{R}^*$.

Réciproquement Si $P(X) = a(X-1)^2$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ alors $P'(X) = 2(X-1)$ et on a $P(1) = P'(1) = 0$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2 et $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X-1)^2Q(X)$. Montrons que $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$. En effet, on a $P'(X) = 2(X-1)Q(X) + (X-1)^2Q'(X)$. En évaluant P et P' en 1, on obtient $P(1) = P'(1) = 0$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2 tel que $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$. Montrons qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X-1)^2Q(X)$. En effet, puisque $P(1) = 0$, il existe $H \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X-1)H(X)$. Montrons que $H(X)$ se factorise lui même par $X-1$. Pour cela il suffit de montrer que $H(1) = 0$.

   On a $P'(X) = H(X) + (X-1)H'(X)$ et $P'(1) = 0$, d'où $H(1) = 0$. Donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $H(X) = (X-1)Q(X)$, et par conséquent $P(X) = (X-1)H(X) = (X-1)(X-1)Q(X) = (X-1)^2Q(X)$.
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2 et $n \in \mathbb{N}^*$. On note P'' la dérivée dérivée seconde de P. Supposons que $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$. Montrons qu'il existe $H \in \mathbb{R}[X],\ P(X) = (X-1)^3H(X)$.

   En effet ; comme $P(1) = P'(1) = 0$, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X-1)^2Q(X)$. Montrons que $Q(1) = 0$.

   On a $P''(X) = (P'(X))' = (2(X-1)Q(X) + (X-1)^2Q'(X))' = P(X)Q''(X) + 4(X-1)Q'(X) + 2Q(X)$ (à vérifier par le lecteur) ; en particulier $P''(1) = 2Q(1)$. Or $P''(1) = 0$,donc $Q(1) = 0$. Donc il existe $H \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(X) = (X-1)H(X)$. On a alors $P(X) = (X-1)^2Q(X) = (X-1)^3H(X)$.

   Pour les curieux :

   Cas général : Soit Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul, $a \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ième}}$ de P et $P^{(0)} = P$.

   On a équivalence entre :

   (a) $\exists Q \in \mathbb{R}[X],\ P(X) = (X-a)^mQ(X)$.

   (b) $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0$.

   La preuve utilise la formule de Taylor (Hors programme) qu'on peut démontrer avec récurrence :

   « Si $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $n = deg\ (P)$ alors $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^k(a)}{k!}(X-a)^k$ »

Exercice 8 (division euclidienne et matrices)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) On a $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$. On vérifie facilement que $A^2 - 3A + 2I = 0$. On a alors $A(A-3I) = -2I$, soit $A\left(\dfrac{3I-A}{2}\right) = I$. Donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{3I-A}{2}$. Après calcul on obtient

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Pour $n \geqslant 2$, déterminons le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.

On a $X^n = (X^2 - 3X + 2)Q(X) + R(X)$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R(X) = aX + b$ où $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$.

Comme 1 et 2 sont les deux racines de $X^2 - 3X + 2$, on a $1^n = R(1)$ et $2^n = R(2)$. D'où le système :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 2^n \end{cases}.$$

Cela donne $a = 2^n - 1$ et $b = 2 - 2^n$. Donc $R(X) = (2^n - 1)X + 2 - 2^n$.

(c) On a d'après b), $A^n = (A^2 - 3A + 2I)Q(A) + R(A) = R(A) = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I$. Finalement

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & -2^{n+1} + 2 \\ 3 \times 2^n - 3 & 3 \times 2^n - 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 (**) (polynôme et racines)

Soient a, b, c nombres réels non nuls et distincts.
Soit P le polynôme défini par :

$$P = \frac{X(X-b)(X-c)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{X(X-c)(X-a)}{b(b-c)(b-a)} + \frac{X(X-a)(X-b)}{c(c-a)(c-b)}$$

1. Montrons que a, b et c sont des racines de $P(X) - 1$.
   Comme $P(a) = P(b) = P(c) = 1$, a, b et c sont des racines de $P(X) - 1$.
2. Montrons que $P(X)$ peut s'écrire sous la forme $P(X) = \lambda(X-a)(X-b)(X-c)+1$ où λ est une constante que l'on déterminera.
   Le polynôme $P(X)-1$ admet trois racines deux à deux distincts et $degP(X)-1 \leqslant 3$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(X) - 1 = \lambda(X-a)(X-b)(X-c)$. Soit $P(X) = \lambda(X-a)(X-b)(X-c) + 1$. Pour déterminer λ on évalue P en 0. On a $P(0) = \lambda(0-a)(0-b)(0-c) + 1 = -abc\lambda + 1$.D'autre part $P(0) = 0$. Donc $\lambda = \dfrac{1}{abc}$.

Exercice 10 (***)

Résoudre les équations suivantes :

1. $Q^2 = XP^2$ d'inconnues $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ Si $(P,\ Q)$ est un couple solution de polynômes non nuls alors $Q^2 = XP^2$ donne $2deg\ Q = 1 + 2deg\ P$ avec $deg\ P, deg\ Q \in N$ ce qui est impossible. Il reste le cas où l'un des polynômes P ou Q est nul et l'autre, alors, l'est aussi. Inversement, le couple nul est effectivement solution.
2. Le polynôme nul est solution. on suppose que $P \neq 0$
   On pose $n = deg\ P$ alors $deg\ P \circ P = (deg\ P)^2 = n^2$. L'équation donne $n^2 = n$, soit $n(n-1) = 0$ Donc $n = 0$ où $n = 1$. Donc $P(X)$ est de la forme $P(X) = aX + b$ avec $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0;\ 0)\}$.
   $P \circ P = P \Leftrightarrow a(aX+b) + b = aX + b \Leftrightarrow a^2 = a$ et $ab = 0$.
   Après résolution on obtient ($a = 1$ et $b = 0$) ou ($a = 0$ et b quelconque).
   Finalement les solutions sont le polynôme X et les polynômes constants.

Exercice 11 (***)

Parmi les polynômes constants, seuls le polynôme nul est solution. Si $deg\ P = n \geqslant 1$ alors $deg\ P(X^2) = 2n$ et $deg\ (X^2+1)P(X) = n + 2$. Donc pour vérifier l'équation, il est nécessaire que $2n = n + 2$, soit $n = 2$.

On peut alors écrire P sous la forme $aX^2 + bX + c$.

L'équation devient $aX^4 + bX + c = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c$. Par identification des coefficients on obtient $b = 0$ et $c = -a$ c'est à dire $P(X) = aX^2 - a$.

Conclusion, les polynômes solutions sont les $a(X^2 - 1)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 12 (***)

Soit $P(X) = 2X^4 + 3X^3 - X^2 + 3X + 2$. On pose $Y = X + \dfrac{1}{X}$.

1. $\dfrac{P(X)}{X^2} = 2X^2 + 3X - 1 + \dfrac{3}{X} + \dfrac{2}{X^2} = 2(X^2 + \dfrac{1}{X^2}) + 3(X + \dfrac{1}{X}) - 1.$
   Or $Y^2 = X^2 + 2 + \dfrac{1}{X^2}$. D'où $X^2 + \dfrac{1}{X^2} = Y^2 - 2$. On a alors $\dfrac{P(X)}{X^2} = 2(Y^2-2) + 3Y - 1 = 2Y^2 + 3Y - 5$.
   On pose $Q(Y) = 2Y^2 + 3Y - 5$.
2. Les racines de Q sont 1 et $-\dfrac{5}{2}$.
3. On a $\dfrac{P(X)}{X^2} = 2(Y-1)(Y+\dfrac{5}{2}) = (Y-1)(2Y+5) = (Y-1)(2Y+5) = (X + \dfrac{1}{X} - 1)(2(X + \dfrac{1}{X}) + 5) = \dfrac{(X^2 - X + 1)(2X^2 + 5X + 2)}{X^2}$.

Donc $P(X) = (X^2 - X + 1)(2X^2 + 5X + 2)$.
$X^2 - X + 1$ ne se factorise pas car $\Delta < 0$.
Pour $2X^2 + 5X + 2$, $\Delta = 9$.
$X_1 = \dfrac{-5-3}{4} = -2$ et $X_2 = \dfrac{-5+3}{4} = -\dfrac{1}{2}$.
Donc les racines de P sont -2 et $-\dfrac{1}{2}$.
On a alors $P(X) = (X^2 - X + 1)(2X + 1)(X + 2)$