

Exercice 1(Relation entre coefficients et racines)

- Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré possédant deux racines réelles x_1 et x_2 (pas nécessairement distinctes).
 - En utilisant l'expression factorisée de P et en la développant on a $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$. Par identification des coefficients de P on a $b = -a(x_1 + x_2)$ et $c = ax_1x_2$.
Donc $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.
 - Réciproquement, soient x_1 et x_2 deux nombres réels. Montrer que x_1 et x_2 sont les racines du polynôme $P(x) = x^2 - sx + p$, où $s = x_1 + x_2$ et $p = x_1x_2$.
On a $\Delta = s^2 - 4p = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2$.
Donc les racines de P sont $\frac{x_1 + x_2 + x_1 - x_2}{2} = x_1$ et $\frac{x_1 + x_2 - (x_1 - x_2)}{2} = x_2$.
- On considère l'équation $2x^2 - 5x + 3 = 0$.
 - $x_1 = 1$ est une racine évidente de P .
 - On a, d'après 1), $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$ et $x_1x_2 = \frac{3}{2}$.
 - En utilisant l'une des égalité ci-dessus, par exemple la deuxième, on obtient $x_2 = \frac{3}{2}$.
- Montrons qu'ils existent deux nombres dont la somme est 6 et le produit est 1. Les deux nombre existent si, et seulement si, le polynôme $P(X) = X^2 - 6X + 1$ admet deux racines (pas nécessairement distinctes), c'est à dire $\Delta \geq 0$. Ceci est vrai car $\Delta = 32$.
- Déterminons l'âge de Marc et Sophie sachant que Marc est le plus âgé, que la somme de leurs âges est 28 et le produit de leurs âges est égal à 192. On considère l'équation $x^2 - 28x + 192 = 0$.
 $\Delta = 28^2 - 4 \times 192 = 4^2 \times 7^2 - 4^2 \times 48 = 4^2(7^2 - 48) = 16$. Donc $x_1 = \frac{28 - 4}{2} = 12$ et $x_2 = \frac{28 + 4}{2} = 16$.
donc Marc a 16 ans et Sophie en a 12 car Marc est le plus âgé.

Exercice 2(division euclidienne)

- Dans toute la suite, on notera $Q(X)$ et $R(X)$ respectivement le quotient et le reste des divisions euclidiennes.
 - $Q(X) = X^2 - 3X + 6$ et $R(X) = -8$.
 - $Q(X) = X^2 - 4X + 4$ et $R(X) = 24X - 30$.
 - $Q(X) = 2X^2 - X + 2$ et $R(X) = 2X - 3$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)$ en fonction de $P(a)$. En effectuant la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - a)$ on obtient $P(X) = Q(X)(X - a) + K$ avec $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $K \in \mathbb{R}$. En évaluant P en a on obtient $K = P(a)$. $R(X) = P(a)$.
 - Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \neq b$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprime le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$. En effectuant la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - a)(X - b)$ on obtient $P(X) = Q(X)(X - a)(X - b) + \alpha X + \beta$ avec $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. En évaluant P en a et en b , on obtient $a\alpha + \beta = P(a)$ et $b\alpha + \beta = P(b)$.
Donc $R(X) = \alpha X + \beta$ avec $\alpha = \frac{P(b) - P(a)}{b - a}$ et $\beta = \frac{bP(a) - aP(b)}{b - a}$.
 - Soient $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.
Exprime le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$. En effectuant la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - a)^2$ on obtient $P(X) = Q(X)(X - a)^2 + \alpha X + \beta$ avec $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On a $P'(X) = 2(x - a)Q(X) + (X - a)^2Q'(X) + \alpha$. En évaluant P et P' en a , on obtient $a\alpha + \beta = P(a)$ et $\alpha = P'(a)$.
Donc $R(X) = \alpha X + \beta$ avec $\alpha = P'(a)$ et $\beta = P(a) - aP'(a)$.
 - En déduire le reste de la division euclidienne des polynômes de la question 1) . Pour 1)a) on utilise 2)a) pour $a = -1$ on obtient $R(X) = P(-1) = -8$.
Pour 1)b) on utilise 2)c) pour $a = 2$, on obtient $R(X) = 24X - 30$.
Pour 1)c) on utilise 2)b) pour $a = -1$ et $b = 1$, on obtient $R(X) = 2X - 3$.

Exercice 3(Identification et calcul de somme)

1. On a d'une part

$$\begin{aligned} \frac{a}{k(k+1)} + \frac{b}{(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{a(k+2) + bk}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(a+b)k + 2a}{k(k+1)(k+2)}, \end{aligned}$$

et d'autre part $\frac{a}{k(k+1)} + \frac{b}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

d'où $a + b = 0$ et $2a = 1$, soit $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$.

2. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k(k+1)} - \frac{1}{2(k+1)(k+2)} \right) \quad (\text{d'après 1}) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \quad (\text{téléscopage}) \end{aligned}$$

Exercice 4 (Factorisation et étude de fonctions)

1. (a) Factorisons le polynôme $P(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$. Comme 1 est une racine évidente de P , $P(X)$ se factorise par $X - 1$. En effectuant la division euclidienne de $P(X)$ par $X - 1$ on obtient $P(X) = (X - 1)(X^2 - X - 6)$. Or $X^2 - X - 6 = (X + 2)(X - 3)$ (avec le discriminant), donc $P(X) = (X - 1)(X + 2)(X - 3)$.
 - (b) $\frac{1}{P(x)}$ existe si, et seulement si, $P(x) \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_{\frac{1}{P}} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 3\}$.
 $\ln P(x)$ existe si, et seulement si, $P(x) > 0$. Donc $\mathcal{D}_{\ln P} =]-2; 1[\cup]3; +\infty[$.
 - (c) Étudier les variations de la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$.
 On a $f'(x) = P(X)$. Donc f est strictement croissante sur $]-2; 1]$ et $]3; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty; -2]$ et $]1; 3]$.
 - (d) On a $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5 \ln x + 6 = 0 \Leftrightarrow P(\ln x) = 0 \Leftrightarrow \ln x \in \{-2, 1, 3\}$.
 Donc $S = \{e^{-2}, e, e^3\}$.
2. (a) Factorisons le polynôme $P(X) = -4X^3 - 6X^2 - 4X - 2$. Comme -1 est une racine évidente de P , $P(X)$ se factorise par $X + 1$. En effectuant la division euclidienne de $P(X)$ par $X + 1$ on obtient $P(X) = (X + 1)(-4X^2 - 2X - 2) = -2(X + 1)(2X^2 + X + 1)$. Or $2X^2 + X + 1$ est strictement positif car le discriminant est strictement négatif, donc la factorisation de $P(X)$, est $P(X) = -2(X + 1)(2X^2 + X + 1)$.
 - (b) $\sqrt{P(x)}$ existe si, et seulement si, $P(x) \geq 0$. Or le signe de $P(x)$ est celui de $-2(X + 1)$ d'après 2.a).
 Donc $\mathcal{D}_{\sqrt{P}} =]-\infty; -1]$.
 - (c) Étudions les variations de la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x$.
 On a $f'(x) = P(X)$. Donc f est strictement croissante sur $]-\infty; -1]$ et strictement décroissante sur $[-1; +\infty[$.
 - (d) On a $-4e^{2x} - 6e^x - 4 - 2e^{-x} = e^{-x}P(e^x)$. Donc $-4e^{2x} - 6e^x - 4 - 2e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x}P(e^x) = 0 \Leftrightarrow P(e^x) = 0 \Leftrightarrow e^x = -1$ ceci est impossible. Donc $S = \emptyset$.

Exercice 5 (équation fonctionnelle)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X + 1) = P(X)$. Supposons de plus que P a au moins une racine $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(\alpha + n) = 0$.

On a $P(\alpha + 0) = P(\alpha) = 0$

Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, $P(\alpha + n) = 0$. Montrons que $P(\alpha + n + 1) = 0$.

En effet,

$$\begin{aligned} P(\alpha + n + 1) &= P(\alpha + n) \text{ car } P(X + 1) = P(X) \\ &= 0 \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(\alpha + n) = 0$.

2. D'après 1) P admet une infinité de racines, donc $P = 0$.

Exercice 6 (polynômes pairs, impairs)

Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} P(X) - P(-X) &= aX^2 + bX + c - (a(-X)^2 + b(-X) + c) \\ &= 2bX \end{aligned}$$

1. Si P est pair $P(X) - P(-X) = 0$. Or, d'après ce qui précède $P(X) - P(-X) = 2bX$.

Donc $P(X) - P(-X) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ (identification des coefficients). Donc les polynômes pairs de $\mathbb{R}_2[X]$ sont ceux qui s'écrivent sous la forme $P(X) = aX^2 + c$ où $(a, c) \in \mathbb{R}^2$.

On a procédé par identification entre $P(X) - P(-X)$ et le polynôme nul.

2. Si P est impair $P(X) - P(-X) = 2P(X) = 2aX^2 + 2bX + 2c$. Or, d'après ce qui précède $P(X) - P(-X) = 2bX$.

Donc $P(X) - P(-X) = 2aX^2 + 2bX + 2c \Leftrightarrow a = c = 0$ (identification des coefficients).

Donc les polynômes impairs de $\mathbb{R}_2[X]$ sont ceux qui s'écrivent sous la forme $P(X) = bX$ où $b \in \mathbb{R}$.

3. **Cas général** : Soient $P \in \mathbb{R}[X]$. P s'écrit sous la forme $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ où $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} P(X) - P(-X) &= \sum_{i=0}^n a_i X^i - \sum_{i=0}^n a_i (-X)^i \\ &= \sum_{i=0}^n a_i (X^i - (-X)^i) \\ &= \sum_{i \in I} 2a_i X^i \end{aligned}$$

où I est l'ensemble des indices impairs.

- (a) Si P est pair alors $P(X) - P(-X) = 0$. Or $P(X) - P(-X) = \sum_{i \in I} 2a_i X^i$.

Donc $P(X) - P(-X) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in I, a_i = 0$ (identification des coefficients). Donc les polynômes pairs de $\mathbb{R}[X]$ sont ceux qui s'écrivent sous la forme $P(X) = \sum_{k=0}^m a_{2k} X^{2k}$ où $m \in \mathbb{N}$.

- (b) Si P est impair alors $P(X) - P(-X) = 2P(X) = \sum_{i=0}^n 2a_i X^i$. Or $P(X) = \sum_{i \in I} 2a_i X^i$.

Donc $P(X) - P(-X) = 2P(X) \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket \setminus I, a_i = 0$ (identification des coefficients). Donc les polynômes impairs de $\mathbb{R}[X]$ sont ceux qui s'écrivent sous la forme $P(X) = \sum_{k=0}^m a_{2k+1} X^{2k+1}$ où $m \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 (Racines multiples d'un polynôme)

1. Soit P un polynôme P de degré 2 tels que $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$.

On a $P(X) = aX^2 + bX + c$ et $P'(X) = 2aX + b$ avec $a \neq 0$. Comme $P(1) = P'(1) = 0$, on a :

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases}.$$

Donc $b = -2a$ et $c = a$ (à vérifier par le lecteur) et alors P est de la forme : $P(X) = a(X - 1)^2$ avec $a \in \mathbb{R}^*$.

Réciproquement Si $P(X) = a(X - 1)^2$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ alors $P'(X) = 2(X - 1)$ et on a $P(1) = P'(1) = 0$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2 et $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X - 1)^2 Q(X)$. Montrons que $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$. En effet, on a $P'(X) = 2(X - 1)Q(X) + (X - 1)^2 Q'(X)$. En évaluant P et P' en 1, on obtient $P(1) = P'(1) = 0$.

3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2 tel que $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$. Montrons qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X - 1)^2 Q(X)$. En effet, puisque $P(1) = 0$, il existe $H \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X - 1)H(X)$. Montrons que $H(X)$ se factorise lui même par $X - 1$. Pour cela il suffit de montrer que $H(1) = 0$.

On a $P'(X) = H(X) + (X - 1)H'(X)$ et $P'(1) = 0$, d'où $H(1) = 0$. Donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $H(X) = (X - 1)Q(X)$, et par conséquent $P(X) = (X - 1)H(X) = (X - 1)(X - 1)Q(X) = (X - 1)^2 Q(X)$.

4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2 et $n \in \mathbb{N}^*$. On note P'' la dérivée dérivée seconde de P . Supposons que $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$. Montrons qu'il existe $H \in \mathbb{R}[X]$, $P(X) = (X - 1)^3 H(X)$.

En effet ; comme $P(1) = P'(1) = 0$, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X - 1)^2 Q(X)$. Montrons que $Q(1) = 0$.

On a $P''(X) = (P'(X))' = (2(X - 1)Q(X) + (X - 1)^2 Q'(X))' = P(X)Q''(X) + 4(X - 1)Q'(X) + 2Q(X)$ (à vérifier par le lecteur) ; en particulier $P''(1) = 2Q(1)$. Or $P''(1) = 0$, donc $Q(1) = 0$. Donc il existe $H \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(X) = (X - 1)H(X)$. On a alors $P(X) = (X - 1)^2 Q(X) = (X - 1)^3 H(X)$.

Pour les curieux :

Cas général : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul, $a \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ième}}$ de P et $P^{(0)} = P$.

On a équivalence entre :

- (a) $\exists Q \in \mathbb{R}[X], P(X) = (X - a)^m Q(X)$.
- (b) $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0$.

La preuve utilise la formule de Taylor (Hors programme) qu'on peut démontrer avec récurrence :

$$\text{« Si } P(X) \in \mathbb{R}[X] \text{ et } n = \text{deg}(P) \text{ alors } P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k \text{ »}$$

Exercice 8 (division euclidienne et matrices)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) On a $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$. On vérifie facilement que $A^2 - 3A + 2I = 0$. On a alors $A(A - 3I) = -2I$, soit $A \left(\frac{3I - A}{2} \right) = I$. Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{3I - A}{2}$. Après calcul on obtient

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- (b) Pour $n \geq 2$, déterminons le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
On a $X^n = (X^2 - 3X + 2)Q(X) + R(X)$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R(X) = aX + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Comme 1 et 2 sont les deux racines de $X^2 - 3X + 2$, on a $1^n = R(1)$ et $2^n = R(2)$. D'où le système :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 2^n \end{cases} .$$

Cela donne $a = 2^n - 1$ et $b = 2 - 2^n$. Donc $R(X) = (2^n - 1)X + 2 - 2^n$.

- (c) On a d'après b), $A^n = (A^2 - 3A + 2I)Q(A) + R(A) = R(A) = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I$. Finalement

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & -2^{n+1} + 2 \\ 3 \times 2^n - 3 & 3 \times 2^n - 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 ()** (polynôme et racines)

Soient a, b, c nombres réels non nuls et distincts.

Soit P le polynôme défini par :

$$P = \frac{X(X-b)(X-c)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{X(X-c)(X-a)}{b(b-c)(b-a)} + \frac{X(X-a)(X-b)}{c(c-a)(c-b)}$$

1. Montrons que a, b et c sont des racines de $P(X) - 1$.

Comme $P(a) = P(b) = P(c) = 1$, a, b et c sont des racines de $P(X) - 1$.

2. Montrons que $P(X)$ peut s'écrire sous la forme $P(X) = \lambda(X-a)(X-b)(X-c) + 1$ où λ est une constante que l'on déterminera.

Le polynôme $P(X) - 1$ admet trois racines deux à deux distincts et $\deg P(X) - 1 \leq 3$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(X) - 1 = \lambda(X-a)(X-b)(X-c)$. Soit $P(X) = \lambda(X-a)(X-b)(X-c) + 1$. Pour déterminer λ on évalue P en 0. On a $P(0) = \lambda(0-a)(0-b)(0-c) + 1 = -abc\lambda + 1$. D'autre part $P(0) = 0$. Donc

$$\lambda = \frac{1}{abc}.$$

Exercice 10 (*)**

Résoudre les équations suivantes :

1. $Q^2 = XP^2$ d'inconnues $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ Si (P, Q) est un couple solution de polynômes non nuls alors $Q^2 = XP^2$ donne $2\deg Q = 1 + 2\deg P$ avec $\deg P, \deg Q \in \mathbb{N}$ ce qui est impossible. Il reste le cas où l'un des polynômes P ou Q est nul et l'autre, alors, l'est aussi. Inversement, le couple nul est effectivement solution.

2. Le polynôme nul est solution. on suppose que $P \neq 0$

On pose $n = \deg P$ alors $\deg P \circ P = (\deg P)^2 = n^2$. L'équation donne $n^2 = n$, soit $n(n-1) = 0$ Donc $n = 0$ ou $n = 1$. Donc $P(X)$ est de la forme $P(X) = aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$.

$$P \circ P = P \Leftrightarrow a(aX + b) + b = aX + b \Leftrightarrow a^2 = a \text{ et } ab = 0.$$

Après résolution on obtient $(a = 1 \text{ et } b = 0)$ ou $(a = 0 \text{ et } b \text{ quelconque})$.

Finalement les solutions sont le polynôme X et les polynômes constants.

Exercice 11 (*)**

Parmi les polynômes constants, seuls le polynôme nul est solution. Si $\deg P = n \geq 1$ alors $\deg P(X^2) = 2n$ et $\deg (X^2 + 1)P(X) = n + 2$. Donc pour vérifier l'équation, il est nécessaire que $2n = n + 2$, soit $n = 2$.

On peut alors écrire P sous la forme $aX^2 + bX + c$.

L'équation devient $aX^4 + bX + c = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c$. Par identification des coefficients on obtient $b = 0$ et $c = -a$ c'est à dire $P(X) = aX^2 - a$.

Conclusion, les polynômes solutions sont les $a(X^2 - 1)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 12 (*)**

Soit $P(X) = 2X^4 + 3X^3 - X^2 + 3X + 2$. On pose $Y = X + \frac{1}{X}$.

$$1. \frac{P(X)}{X^2} = 2X^2 + 3X - 1 + \frac{3}{X} + \frac{2}{X^2} = 2\left(X^2 + \frac{1}{X^2}\right) + 3\left(X + \frac{1}{X}\right) - 1.$$

Or $Y^2 = X^2 + 2 + \frac{1}{X^2}$. D'où $X^2 + \frac{1}{X^2} = Y^2 - 2$. On a alors $\frac{P(X)}{X^2} = 2(Y^2 - 2) + 3Y - 1 = 2Y^2 + 3Y - 5$.

On pose $Q(Y) = 2Y^2 + 3Y - 5$.

$$2. \text{ Les racines de } Q \text{ sont } 1 \text{ et } -\frac{5}{2}.$$

$$3. \text{ On a } \frac{P(X)}{X^2} = 2(Y-1)\left(Y + \frac{5}{2}\right) = (Y-1)(2Y+5) = (Y-1)(2Y+5) = \left(X + \frac{1}{X} - 1\right)\left(2\left(X + \frac{1}{X}\right) + 5\right) = \frac{(X^2 - X + 1)(2X^2 + 5X + 2)}{X^2}.$$

Donc $P(X) = (X^2 - X + 1)(2X^2 + 5X + 2)$.

$X^2 - X + 1$ ne se factorise pas car $\Delta < 0$.

Pour $2X^2 + 5X + 2$, $\Delta = 9$.

$$X_1 = \frac{-5-3}{4} = -2 \text{ et } X_2 = \frac{-5+3}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Donc les racines de P sont -2 et $-\frac{1}{2}$.

On a alors $P(X) = (X^2 - X + 1)(2X + 1)(X + 2)$