Exercice 1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.
Exprimer verbalement la signification des assertions suivantes :
a) $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = C$
b) $\forall x \in I, f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
c) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$
d) $\forall x, y \in I, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$
e) $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Exercice 2

Décrire les parties de $\mathbb{R}$ dans lesquelles évoluent x pour que les assertions suivantes soient vraies :
a) $(x > 0$ et $x < 1)$ ou $x = 0$
b) $x > 3$ et $x < 5$ et $x \neq 4$
c) $(x \leqslant 0$ et $x > 1)$ ou $x = 4$
d) $x \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 2$.

Exercice 3

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles.
Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :
a) la fonction f s'annule.
b) la fonction f est la fonction nulle.
c) f n'est pas une fonction constante.
d) f ne prend jamais deux fois la même valeur.
e) la fonction f présente un minimum.
f) f prend des valeurs arbitrairement grandes.
g) f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Exercice 4

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I.
Exprimer les négations des assertions suivantes :
a) $\forall x \in I, f(x) \neq 0$
b) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$
c) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f(x)| \leqslant M$
d) $\forall x, y \in I, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$
e) $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
f) $\forall x \in I, f(x) > 0 \Rightarrow x \leqslant 0$.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On considère les assertions suivantes :

$$P : « \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 » , \ Q : « \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 »$$

et

$$R : « \ (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0) \ »$$

Parmi les implications suivantes lesquelles sont exactes :

a) $P \Rightarrow Q$ b) $Q \Rightarrow P$ c) $Q \Rightarrow R$
d) non$(R) \Rightarrow Q$ e) non$(Q) \Rightarrow$ non(P) ?

Exercice 6

Sachant $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, montrer

$$\forall x \in \mathbb{Q}, x + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Exercice 7

Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbb{N}$$

Exercice 8

Soit $m \in \mathbb{R}$. Discuter selon m le nombre de solutions de l'équation

$$mx^2 - 2(m+1)x + m - 1 = 0.$$

Exercice 9

Soit $a \in \mathbb{R}$.
a) Montrer que $(\forall \varepsilon \geqslant 0, |a| \leqslant \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.
b) Montrer que $(\forall \varepsilon > 0, |a| \leqslant \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.

Exercice 10

Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Peut-on écrire :

a) $a \in E$ b) $a \subset E$ c) $\{a\} \subset E$
d) $\emptyset \in E$ e) $\emptyset \subset E$ f) $\{\emptyset\} \subset E$?

Exercice 11

Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Etablir

$$A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$$

Exercice 12

Etant donné A et B deux parties de E, justifier

$$\overline{A} \backslash \overline{B} = B \backslash A$$

Exercice 13

Etant donné A, B et C trois parties de E, justifier les équivalences suivantes :

a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

b) $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$.

c) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$

d) $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \Leftrightarrow B = C$

Exercice 14

Soient a, b et c trois réels tels que $c \neq 0$ et $a^2 + bc \neq 0$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{a/c\} \to \mathbb{R} \setminus \{a/c\}$ définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$.

Justifier que l'application f est bien définie.

Calculer $f \circ f$, en déduire que f est une application bijective dont on déterminera l'application réciproque.

Exercice 15

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est bien définie et bijective.

Exercice 16

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Etablir les implications suivantes :

a) $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective.

b) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective

c) $g \circ f$ injective et f surjective $\Rightarrow$ g injective.

d) $g \circ f$ surjective et g injective $\Rightarrow$ f surjective.

Exercice 17

1. Décrire l'image directe de $\mathbb{R}$ par la fonction exponentielle.

2. Déterminer de quels intervalles, l'intervalle $[2, 7]$ est l'image par la fonction carrée.

Exercice 18

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intervalle image J de I par f puis vérifier que f réalise une bijection de I sur J puis préciser f^{-1}

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $I =]-\infty, 2]$.
2. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$, $I =]-2, +\infty]$.
3. $f(x) = \sqrt{2x+3} - 1$, $I = \left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right]$.
4. $f(x) = \dfrac{x}{1+ \mid x \mid}$, $I = \mathbb{R}$.