

**Exercice 1(Relation entre coefficients et racines)**

- Soit  $P(x) = ax^2 + bx + c$  un polynôme du second degré possédant deux racines réelles  $x_1$  et  $x_2$  (pas nécessairement distinctes).
  - En utilisant la forme factorisée du polynôme  $P$ , puis en développant l'expression obtenue, exprimer  $x_1 + x_2$  et  $x_1x_2$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c$ .
  - Réciproquement, soient  $x_1$  et  $x_2$  deux nombres réels. Montrer que  $x_1$  et  $x_2$  sont les racines du polynôme  $P(x) = x^2 - sx + p$ , où  $s = x_1 + x_2$  et  $p = x_1x_2$ .
- On considère l'équation  $2x^2 - 5x + 3 = 0$ .
  - Trouver une solution évidente.
  - Combien vaut la somme et le produit des solutions ?
  - En déduire l'autre solution.
- Trouver, s'ils existent, deux nombres dont la somme est 6 et le produit est 1.
- Déterminer l'âge de Marc et Sophie sachant que Marc est le plus âgé, que la somme de leurs âges est 28 et le produit de leurs âges est égal à 192.

**Exercice 2(division euclidienne)**

- Effectuer la division euclidienne de :
  - $X^3 - 2X^2 + 3X - 2$  par  $X + 1$
  - $X^3 + 3X^2 - 2$  par  $X^2 - 4x + 4$
  - $2X^4 - X^3 + 3X - 5$  par  $X^2 - 1$
- Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Exprimer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)$  en fonction de  $P(a)$  et  $P(b)$ .
  - Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $a \neq b$  et  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Exprimer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$  en fonction de  $P(a)$  et  $P(b)$ .
  - Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Exprimer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)^2$  en fonction de  $P(a)$  et  $P'(a)$ .
  - En déduire le reste de la division euclidienne des polynômes de la question 1) .

**Exercice 3(Identification et calcul de somme)**

- Trouver des réels  $a$  et  $b$  tels que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{a}{k(k+1)} + \frac{b}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$
- Calculer  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$  en utilisant la méthode de la somme télescopique.

**Exercice 4 (Factorisation et étude de fonctions)**

- Factoriser le polynôme  $P(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$ .
  - Donner les domaines de définition des fonctions  $\frac{1}{P}$  et  $\ln(P)$ .
  - Étudier les variations de la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$ .
  - Résoudre l'équation  $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5 \ln x + 6 = 0$ .
- Factoriser le polynôme  $P(X) = -4X^3 - 6X^2 - 4X - 2$ .
  - Donner les domaines de définition de la fonction  $\sqrt{P}$ .
  - Étudier les variations de la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x$ .
  - Résoudre l'équation  $-4e^{2x} - 6e^x - 4 - 2e^{-x} = 0$ .

**Exercice 5 (équation fonctionnelle)**

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P(X+1) = P(X)$ . Supposons de plus que  $P$  a au moins une racine  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha + n$  est une racine de  $P$ .
- Déduire l'ensemble des polynômes  $P$  vérifiant ces hypothèses.

**Exercice 6 (polynômes pairs, impairs)**

Un polynôme est *pair* (resp. *impair*) si la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $P : x \mapsto P(x)$  est *paire* (resp. *impaire*).

1. Déterminer tous les polynômes pairs de  $\mathbb{R}_2[X]$   
On procèdera par identification entre  $P(X) - P(-X)$  et le polynôme nul.
2. Déterminer tous les polynômes impairs de  $\mathbb{R}_2[X]$
3. Peut-on généraliser aux polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  ?

**Exercice 7 (Racines multiples d'un polynôme)**

On veut démontrer le résultat évoqué dans la remarque 3 du cours.

1. Déterminer l'ensemble des polynômes  $P$  de degré 2 tels que  $P(1) = 0$  et  $P'(1) = 0$ .
2. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré supérieur ou égal à 2 et  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P(X) = (X - 1)^2 Q(X)$ . Montrer que  $P(1) = 0$  et  $P'(1) = 0$ .
3. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré supérieur ou égal à 2 tel que  $P(1) = 0$  et  $P'(1) = 0$ . Montrer qu'il existe  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P(X) = (X - 1)^2 Q(X)$ .
4. Généraliser ce résultat au maximum et prouver si possible votre affirmation.

**Exercice 8 (division euclidienne et matrices)**

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer  $A^2 - 3A + 2I$ . En déduire que  $A$  est inversible et calculer son inverse.
2. Pour  $n \geq 2$ , déterminer le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^2 - 3X + 2$ .
3. En déduire l'expression de la matrice  $A^n$ .

**Exercice 9 (\*\*) (polynôme et racines)**

Soient  $a, b, c$  nombres réels non nuls et distincts.

Soit  $P$  le polynôme  $P$  défini par :

$$P = \frac{X(X-b)(X-c)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{X(X-c)(X-a)}{b(b-c)(b-a)} + \frac{X(X-a)(X-b)}{c(c-a)(c-b)}$$

1. Montrer que  $a, b$  et  $c$  sont des racines de  $P(X) - 1$ .
2. Montrer que  $P(X)$  peut s'écrire sous la forme  $P(X) = \lambda(X-a)(X-b)(X-c) + 1$  où  $\lambda$  est une constante que l'on déterminera.

**Exercice 10 (\*\*\*)**

Résoudre les équations suivantes :

1.  $Q^2 = XP^2$  d'inconnues  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$
2.  $P \circ P = P$  d'inconnue  $P \in \mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 11 (\*\*\*)**

Trouver les  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que  $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$ .

**Exercice 12 (\*\*\*)**

Soit  $P(X) = 2X^4 + 3X^3 - X^2 + 3X + 2$ . On pose  $Y = X + \frac{1}{X}$ .

1. Montrer qu'il existe un polynôme  $Q$  de degré 2 tel que  $Q(Y) = \frac{P(X)}{X^2}$ .
2. Calculer les racines de  $Q$ .
3. En déduire les racines de  $P$  et sa factorisation.