Exercice 1 (**Reconnaître des suites. Pour chacune des suites suivantes :**).

1. Dire si elle est arithmétique ou géométrique et préciser sa raison 2. Donner sa forme expilcite. 3. Donner son premier terme et une définition par récurrence. 4. Exprimer $u_0 + \cdots + u_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$. (certaines de ces infos sont contenues dans l'énoncé...)

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tq* $a_n = (-1)^n$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.
2. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tq* $b_0 = -1$ *et* $b_{n+1} = 3b_n$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.
3. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tq* $c_n = \frac{n+1}{3}$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.
4. $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tq* $d_0 = -1$ *et* $d_{n+1} = d_n + 2$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.
5. $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *arithmétique tq* $e_3 = 5$ *et* $e_8 = 20$.
6. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *géométrique de raison* 2 *tq* $f_3 = 128$.
7. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *constante égale à* 4.
8. $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *géométrique tq* $h_{10} = 10$ *et* $h_{12} = 20$.

Exercice 2 (**Démonstration par récurrence**).

1. *Calculer les premiers termes de la suite :* $\begin{cases} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{1+u_n^2} \end{cases}$ *puis conjecturer une formule explicite et la démontrer par récurrence.*
2. *On définit la suite* (u_n) *par* $\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & u_n + 2n - 11, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = an^2 + bn + c$, *où* a, b *et* c *sont trois nombres réels à préciser.*

Exercice 3 (**Expression explicite d'une suite arithmetico-géométrique**).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $u_0 = 14$ *et* $u_{n+1} = 6 - \frac{1}{2}u_n$.

1. *Calculer* u_1, u_2 *et* u_3.
2. *Représenter les droites d'équation* $y = x$ *et* $y = 6 - 0,5x$, *puis conjecturer* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *et les variations de la suite.*
3. *Donner une expression explicite de* u_n *pour* $n \in \mathbb{N}$, *calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, *puis* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 4 (**Suites couplées**).

On définit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in N}$ *par* $a_0 = 0$ *et* $b_0 = 12$, *puis pour* $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3}$ *et* $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4}$

1. *On considère la suite* (u_n) *définie, pour* $n \in \mathbb{N}$, *par* $u_n = b_n - a_n$.
   (a) *Montrer que la suite* (u_n) *est une suite géométrique de raison* $\dfrac{5}{12}$ *et de premier terme à préciser.*
   (b) *En déduire l'expression de* u_n *en fonction de l'entier naturel* n.
2. *On considère la suite* (v_n) *définie, pour tout entier naturel* n, *par* $v_n = 4b_n + 3a_n$.
   (a) *Montrer que la suite* (v_n) *est constante.*
   (b) *Préciser quelle est la valeur constante de* v_n.
3. *A l'aide des questions 1(b) et 2(b) , calculer les expressions de* a_n *et* b_n *pour tout entier naturel* n.
4. *Calculer* $S_n = b_0 + b_1 + ... + b_n$ *en fonction de* n.

Exercice 5 (**Ecriture rationnelle vs écriture périodique**).

Soit (u_n) *la suite géométrique de premier terme* $u_0 = 0{,}27$ *et de raison* $\frac{1}{100}$ *et* $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$, *pour* $n \in \mathbb{N}$.

A l'aide de ces outils, donner l'écriture rationnelle de $0,272727....$ *Adapter la méthode pour démontrer que* $0,999.... = 1$

Exercice 6 (**Une suite homographique**).

La suite (u_n) *est définie par* $u_0 = \frac{1}{4}$ *et* $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{2u_n - 1}$ *pour* $n \in \mathbb{N}$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $v_n = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{2}$.

On admet que les termes u_n *et* v_n *sont définis pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que (v_n) *est une suite géométrique 2. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *exprimer* v_n *puis* u_n *en fonction de* n.

Exercice 7 (**Changement de suites divers**).

1. Soit u la suite définie par : $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 2\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}u_n$
(a) Montrer que la suite v définie par : pour tout entier $n \geqslant 1 v_n = \dfrac{n+1}{n}u_n$ est géométrique. (b) En déduire la valeur de u_n en fonction de n.
2. Soit u la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 1} + 1$.
(a) Montrer que pour tout entier n, u_n est défini et $u_n > 1$.
(b) Montrer que la suite v définie par $v_n = \ln(u_n - 1)$ est définie et est géométrique.
(c) En déduire la valeur de u_n en fonction de n.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite telle que $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{4u_n}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $v_n = \ln u_n$.
(a) Montrer par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$: « u_n défini et $u_n > 0$ » (b) Montrer que : $\forall n \geqslant 1, v_{n+1} = \ln 2 + \frac{1}{2}v_n$.
(c) Déduire les termes généraux de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Le vérifier en calculant de 2 manières u_1 et u_2.
(d) Étudier la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 8 (**Comparaison avec une suite géométrique**).

1. Soit u telle que $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant 2u_n$ Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 3 \cdot 2^n$ Étudier la convergence.
2. Soit v positive telle que $v_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}v_n$ Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant 3 \cdot (\frac{1}{2})^n$ Étudier la convergence.

Exercice 9 (**Limite de suite (classique)**).

Soit u de terme général $\dfrac{n!}{a^n}$.

1. ***Si 0⩽a⩽1 :*** *. Déterminer la limite de u.*
2. ***Si a>1 :*** *(a) Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 2$. (b) Déduire que si $n \geqslant n_0$ alors : $u_n \geqslant 2^{n-n_0}u_{n_0}$.*
   (c) Déduire la limite de u.

Exercice 10 (**Suite récurrente (classique)**).

Soit u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$.

1. *Étudier le polynôme $P(X) = X^2 - X - 12$ (factorisation, signe, solutions de $P(x) = 0$)*
2. *Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: "u_n est défini et $0 < u_n < 4$"*
3. *Montrer par récurrence que u est strictement croissante.*
   Variante astucieuse : combiner une quantité conjuguée avec la question 1.
4. *(a) Déduire que u converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$. (b) Déduire de la question 2 un encadrement de l.*
   (c) Montrer que l vérifie $P(l) = 0$. (d) Déduire des questions précédentes la valeur de l.

Exercice 11 (**Limites de suites**).

1. *Calculer la limites des suites suivantes, par la méthode de votre choix.*

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} - 2$	*(b)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n - 2n^3}{n^2 + 1}$.	*(c)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 + 3(-1)^n}{2n}$

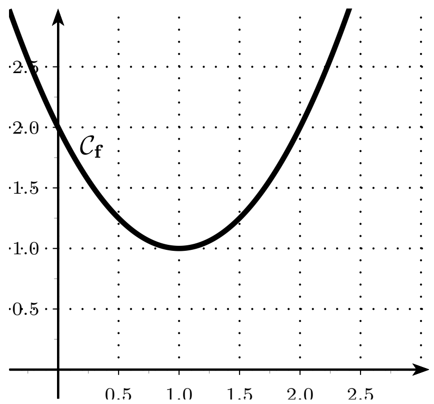
2. *Dans ces questions, on veut démontrer "à la main" plusieurs résultats qui sont utilisés dans la pratique :*
   (a) On suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

i. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$	*ii. Démontrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$

   (b) Soit $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$. On suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = l + l'$.

Exercice 12 (**Suite récurrente et conjecture graphique**).

La suite (u_n) est définie par $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$. $f : x \mapsto x^2 - 2x + 2$ est représentée ci-dessous



1. *Conjectures graphiques*
   (a) ***Construire*** *les points $M_0(u_0;0)$, $M_1(u_1;0)$, $M_2(u_2;0)$, $M_3(u_3;0)$ et $M_4(u_4;0)$ sur le graphique ci-dessus (sans faire de calculs et en laissant apparents les traits de construction).*
   (b) *Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sur sa convergence ?*
2. *Démonstration des conjectures précédentes.*
   (a) *Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.*
   (b) *Donner une expression factorisée de $u_{n+1} - u_n$. En déduire le sens de variation de la suite.*
   (c) *Montrer que la suite est convergente et déterminer sa limite.*

Exercice 13 (**Suite et absurde**).

Soit f définie par : $f(x) = \ln(x) + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. *(a) Etudier les variations de f. (b) Déterminer le signe de $f(x) - x$.*
2. *Soit u la suite définie par $u_0 > 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$*
   (a) *Montrer que pour tout entier n : $u_n \geq 1$ et en déduire que la suite est croissante.*
   (b) *Montrer qu'elle n'est pas majorée est déterminer sa limite.*

   On suppose à présent que $u_0 = e$
   (c) *Montrer que, pourt tout entier n : $u_{n+1} \geq u_n + 1$, en déduire que $u_n \geq n + e$ et retrouveer la limite de la suite.*
3. *Soit v définie par $v_0 \in]0,1[$ et pour tout entier n, $v_{n+1} = f(v_n)$*
   Montrer qu'il existe un entier n pour lequel $v_n < 0$ et en déduire qu'elle n'est plus défnie à partir de $n+1$.

Exercice 14 (**Suite définie par une somme**).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$.

1. *Quels sont les plus petit et plus grand terme de la somme ? En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leqslant w_n \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+1}$*
2. *A l'aide de la question précédente, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.*

Exercice 15 (**Différentes méthodes**).

Soient (a_n) et (b_n) deux suites définies par $a_0 = 2$, $b_0 = 0$ et les relations suivantes. $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases}$

Les questions 2, 3 et 4 permettent de déterminer le terme général de ces suites de 3 manières indépendantes.

1. *Calculer a_1, b_1, a_2 et b_2*
2. ***Méthode 1 :***
   (a) *Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $s_n = a_n + b_n$. Montrer que (s_n) est géométrique et déterminer son terme général.*

   (b) *Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d_n = a_n - b_n$. Montrer que (d_n) est constante et déterminer son terme général.*
   (c) *Déduire en résolvant un système les termes généraux de (a_n) et (b_n).*

3. ***Méthode 2 :***
   (a) *En combinant les relations (1) et (2) montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$*
   (b) *Déterminer le terme général de (a_n).*
   (c) *Déduire celui de (b_n) à l'aide de la relation de récurrence (1)*

4. ***Méthode 3 :***
   (a) *Soit X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$*
   (b) *On définit la suite (α_n) par $\alpha_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+1} = 3\alpha_n + 1$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n + 1 & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_n + 1 \end{pmatrix}$*
   (c) *Déterminer le terme général de (α_n)*
   (d) *Déduire les termes généraux de (a_n) et (b_n)*

Exercice 16 (Suite et puissance de matrice).
Soit u définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.
On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.*
2. *Soit $D = P^{-1}AP$. Déterminer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
3. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}A^nP$ et déduire une expression de A^n.*
4. *Soit $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$*
5. *Déduire une expression de X_n en fonction de A^n et X_0. Puis déduire le terme général de u.*

Exercice 17 (Puissance de matrice et récurrence - EML 2003).
On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre trois et on considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer A^2 et A^3, puis vérifier : $A^3 = A^2 + 2A$.*
2. *Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, il existe un couple (a_n, b_n) de nombres réels tel que : $A^n = a_nA + b_nA^2$, et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.*
3. (a) *Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$.*
   (b) *En déduire a_n et b_n en fonction de n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.*
   (c) *Donner l'expression de A^n en fonction de A, A^2 et n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.*

Exercice 18 (Suites et matrices).
On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1. *Démontrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1 - 2u_n & 2u_n \\ u_n & -u_n & 1 + u_n \end{pmatrix}$.*
2. *Calculer u_n en fonction de n puis expliciter A^n.*

Exercice 19 (**D'après ECRICOME T 2007**).

On se propose de déterminer la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifiant la relation de récurrence :* $\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+2} & = & 5u_{n+1}-6u_n \\ u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 1 \end{array}\right.$
sans utiliser *les résultats du cours sur les suites récurrentes doubles. On définit la matrice* A *par :* $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calcul de la puissance n***-ème de*** A

On considère les matrices à coefficients réels B *et* C *définies par :* $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

1. *Calculer* BC *et* CB *et* B^2. *Qu'en déduire pour* $B^n, n \in \mathbb{N}^*$ *?*
2. *Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel* n *non nul :* $C^n = (-1)^{n-1}C$
3. *Vérifier que l'on a :* $A^2 = 5A - 6I$, *où* I *est la matrice carrée unité d'ordre* 2.
4. *Etablir que la matrice* A *est-inversible et exprimer* A^{-1} *en fonction de* A *et* I.
5. *Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel* n *:* $A^n = 3^nB - 2^nC$
6. *La relation précédente est-elle encore vraie pour* $n = -1$. *C'est-à-dire a-t-on :* $A^{-1} = \frac{1}{3}B - \frac{1}{2}C$ *?*
7. *Montrer que pour tout entier naturel* n *:* $\left(A^{-1}\right)^n = \frac{1}{3^n}B - \frac{1}{2^n}C$

Expression de u_n ***en fonction de*** n

1. *Vérifier que pour tout entier naturel* n *:* $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$
2. *Montrer par récurrence que pour tout entier naturel* n *:* $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. *Donner ainsi l'expression de* u_n *en fonction de* n.

Exercice 20 (Suites et matrices)**.**

Système linéaire de deux suites récurrentes *: on note* A, P, D *les matrices suivantes :* $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On définit les suites (x_n) *et* (y_n) *par :* $\left\{\begin{array}{l} x_0 = 0, \quad y_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = 5x_n + y_n \\ y_{n+1} = -4x_n \end{array}\right. \end{array}\right.$ *et on pose :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

1. *Montrer que* P *est inversible et déterminer* P^{-1}. *Vérifier que l'on a* $D = P^{-1}AP$.
2. *Donner, sans démonstration, l'expression de* D^n *pour* n *entier naturel.*
3. *Exprimer* A *en fonction de* P, P^{-1} *et* D, *puis montrer que, pour tout entier naturel* n, $A^n = PD^nP^{-1}$
   En déduire l'écriture matricielle de A^n *en fonction de* n.
4. *Vérifier que, pour tout entier naturel* n, $U_{n+1} = AU_n$.
5. *Montrer que, pour tout entier naturel* n, $U_n = A^nU_0$. *En déduire l'expression de* x_n *et* y_n *en fonction de* n.

Puissance d'une matrice *: Soient* B *et* I_3 *les matrices suivantes :*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que* $B^2 = 5B - 4I_3$.
2. *Pour* n *entier naturel on définit la propriété* $\mathcal{P}(n)$ *: « il existe deux réels* a_n *et* b_n *tels que* $B^n = a_nB + b_nI_3$ *».*
   (a) *Montrer que* $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$ *sont vraies et déterminer les couples* (a_0, b_0), (a_1, b_1), *et* (a_2, b_2).
   (b) *On suppose* $\mathcal{P}(n)$ *vraie pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *montrer que* $\mathcal{P}(n+1)$ *est vraie et exprimer* a_{n+1} *et* b_{n+1} *en fonction de* a_n *et* b_n.

(c) *Utiliser la première partie de l'exercice pour exprimer a_n et b_n en fonction de n.*

(d) *Conclure en donnant l'écriture matricielle de B^n.*

Exercice 21 (Suites adjacentes).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k-1}$.

1. (a) *Montrer que pour tout $n \geqslant 1$: $\dfrac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)-1} + \dfrac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)-1} = \dfrac{-2}{(4n+1)(4n+3)}$*

   (b) *Montrer que la suite v de terme général $v_n = u_{2n}$ est décroissante. On utilisera le cas particulier de Chasles : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n} + \sum_{k=2n+1}^{2n+2}$*

2. *Montrer de même que la suite w de terme général $w_n = u_{2n+1}$ est croissante. On utilisera le cas particulier de Chasles : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+3} = \sum_{k=1}^{2n+1} + \sum_{k=2n+2}^{2n+3}$.*

3. *Calculer (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) $w_n - v_n$ puis donner la limite de cette suite.*

4. *Montrer que v et w convergent vers une même limite l.*

   Épilogue : *Lorsque $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite l, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l aussi. Nous avons donc démontré dans cette exercice que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.*

Exercice 22 (Changement de suite (difficile) ECRICOME 1999)**.**

Soit (x_n) une suite numérique qui vérifie, pour tout entier naturel n, la relation : $x_{n+2} = \dfrac{1}{3}x_{n+1} + \dfrac{1}{3}x_n$.

1. *Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ (on donne : $\frac{1+\sqrt{13}}{6} = 0,77$ et $\frac{1-\sqrt{13}}{6} = -0,44$ à 10^{-2} près).*

2. *Soient $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$. On étudie la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = a$ $u_1 = b$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$ On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et vérifie $u_n \geqslant 1$*

   Montrer que la seule limite possible de la suite (u_n) est 4.

3. *Soit (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$.*

   (a) *Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.*

   (b) *Vérifier, pour tout entier naturel n : $v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$. En déduire que : $|v_{n+2}| \leqslant \dfrac{1}{3}\left(|v_{n+1}| + |v_n|\right)$.*

   (c) *On note (x_n) la suite définie par : $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et, pour tout entier naturel n, $x_{n+2} = \dfrac{1}{3}x_{n+1} + \dfrac{1}{3}x_n$.*

   Montrer que, pour tout entier naturel n, $|v_n| \leqslant x_n$ et conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

Exercice 23 (Suites adjacentes (difficile)).

1. (a) Soit f la fonction définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x+1}{x}$ et g la composée $g = fof$ définie par $g(x) = f(f(x))$. Etudier les sens de variation sur $\mathbb{R}^+$ de f et de g.

(b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation de $f(x) = x$, puis $g(x) = x$. (On montrera qu'elles ont les mêmes solutions solutions a et b avec $b < 0 < a$, que $b = -1/a$ et que $b = 3 - a$)

Soit u la suite définie par : $u_0 > 0$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Montrer que, $\forall n$, $u_n$est défini et $u_n > 0$

3. On suppose dans cette question que $u_0 = 1$. On définit les suites v et w par : $\forall n$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1} = f(v_n)$.

(a) Montrer que pour tout entier n, $v_{n+1} = g(v_n)$.

(b) Montrer que la suite v et croissante majorée par a. En déduire que v converge vers a.

(c) En déduire que w converge également vers a. Conclure pour u en utilisant le résultat suivant, admis : si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, alors u converge vers cette limite.

4. On pose pour tout entier n, $z_n = \dfrac{u_n - a}{u_n - b}$. (les valeurs a et b étant celles définies précédemment).

On ne suppose plus que $u_0 = 1$ mais seulement que $u_0 > 0$.

(a) Montrer que, pour tout entier n, $z_n$est bien définie et que z est une suite géométrique.

(b) Déterminer la valeur de u_n en fonction de z_n. Déterminer sa limite quand n tend vers l'infini.

Exercices faits au tableau

Exercice 24 (**Critère de d'Alembert**).

Soit (u_n) *une suite de termes strictement positifs et* $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. *Soit* $a \in \mathbb{R}$.

1. *On suppose que* $a \in]1\,;\infty[$ *et qu'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant a$.
   (a) *Montrer que* $u_n \geqslant a^{n-n_0} u_{n_0}$.
   (b) *Montrer que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
   (c) *En déduire que la suite* (S_n) *divergente.*
2. *On suppose que* $a \in]0\,;1[$ *et qu'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant a$.
   (a) *Montrer que* $u_n \leqslant a^{n-n_0} u_{n_0}$.
   (b) *Montrer que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   (c) *On note pour tout* $n \geqslant n_0$, $v_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$
      i. *Montrer que la suite* (v_n) *est majorée par* $\dfrac{1}{1-a}$, *puis qu'elle converge.*
      ii. *En déduire que la suite* (S_n) *est convergente.*
   (d) *Application :*
   Quelle est la nature des suites de termes général :
   $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{a^k}{n!}$ *où* $a \in]0\,;1[$. $\quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{a^k}{n!}$ *où* $a \in]1\,;+\infty[$.

Exercice 25.

Soient (u_n) *et* (u_n) *les suites définie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *par* $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$ $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!n}$. *Montrer que ces deux suites ont adjacentes, puis qu'elles convergent.*

Pour aller plus loin

Exercice 26 (extrait HEC 2013).

Partie I. Prix d'équilibre

Sur le marché d'un certain bien, on note D *la fonction de demande globale (des consommateurs),* O *la fonction d'offre globale (des entreprises) et* p *le prix de vente du bien.*

On suppose habituellement que la fonction $D : p \mapsto D(p)$ *définie sur* $\mathbb{R}_+$ *à valeurs réelles est décroissante et que la fonction* $O : p \mapsto O(p)$ *définie sur* $\mathbb{R}_+$ *à valeurs réelles est croissante.*

Si l'équation $O(p) = D(P)$ *admet ; une solution* p^*, *on dit que* p^* *est un prix d'équilibre du marché.*

Avant d'atteindre un niveau d'équilibre, le prix p *peut être soumis à des fluctuations provoquées par des excès d'offre* $(O(p)) > D(p))$ *ou des excès de demande* $(D(p) > O(p))$ *au cours du temps.*

Afin de rendre compte de cette évolution, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n *la valeur du prix à l'instant* n.

On suppose que la demande dépend de 1a valeur du prix selon la relation $D_n = D(p_n)$ *valable pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Quant aux entreprises, elles adaptent à chaque instant $n \in \mathbb{N}$, *la quantité offerte* O_n *à 1'instant* n *à un prix anticipé à l'instant* $(n-1)$, *noté* $\widehat{p}_n$, *selon la relation* $O_n = O(\widehat{p}_n)$, *où* $\widehat{p}_0$ *peut être interprété comme un prix d'étude de marché.*

On suppose qu'à chaque instant, l'offre est égale à 1a demande, c'est à dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $O_n = D_n$.

Dans toute cette partie, on considère quatre paramètres réels .strictement positifs a, b, c *et* d, *avec* $a > d$, *et on suppose que les fonctions* D *et* O *sont définies sur* $\mathbb{R}_+$ *par :* $D(p) = a - bp$ *et* $O(p) = cp + d$.

Par suite, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D(p_n) = a - bp_n$ *et* $O(\widehat{p}_n) = c\widehat{p}_n + d$.

1. *Dans cette question uniquement, les réels* a, b, c *et* d *ont les valeurs suivantes :* $a = 40$, $b = 8$, $c = 2$ *et* $d = 20$.
   On suppose que p_0 *et.* p_1 *sont donnés et que pour tout entier* $n \geqslant 2$, *on a :* $\widehat{p}_n = 2p_{n-1} - p_{n-2}$

(a) *Établir l'existence et l'unicité d'un prix d'équilibre* p^*. *Calculer* p^*.

(b) *Montrer que pour tout* $n \geqslant 2$, *on a :* $p_n = -\frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} + \frac{5}{2}$.

(c) *On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $v_n = p_n - p^*$. *Montrer que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.*

(d) *Calculer les solutions* r_1 *et* r_2 *de l'équation caractéristique de la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(e) *Exprimer pour tout* $n \in \mathbb{N}$, p_n *en fonction de* n, r_1, r_2, p_0, p_1 *et* p^*.

(f) *Montrer que la suite* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente. Quelle est sa limite ? Interpréter.*

2. *Soit* β *un paramètre réel vérifiant* $0 < \beta \leqslant 1$. *0n suppose que le prix* p_0 *est donné et que les anticipations de prix sont adaptatives, c'est-à dire que pour tout entier* $n \geqslant 1$, *on a :* $\widehat{p}_n = \widehat{p}_{n-1} + \beta\left(p_{n-1} - \widehat{p}_{n-1}\right)$.

   (a) *Exprimer pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *le prix courant* p_n *en fonction du prix anticipé* $\widehat{p}_n$.

   (b) *En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *le prix* p_n *vérifie 1'équation de récurrence suivante :*

$$p_n = \left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)p_{n-1} + \beta\frac{a-d}{b}$$

   (c) *Quel est le prix d'équilibre* p^* ? *Déterminer l'expression de* p_n *en fonction de* n, p_0, p^*, b, c *et* β.

   (d) *En supposant que* $p_0 \neq p^*$, *montrer que la suite* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge si et seulement si :* $\frac{c}{b} < \frac{2}{\beta} - 1$. *Quelle est alors sa limite ?*

   (e) *Étudier la convergence de 1a suite* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *lorsque* $c < b$.