Exercice 1 (**Reconnaître des suites**).

1. *suite géométrique donnée sous une forme explicite.*
2. *suite géométrique définie par récurrence.*
3. *suite arithmétique donnée sous une forme explicite. Décomposer pour écrire cette expression sous la forme classique* $c_0 + nr$.
4. *suite arithmétique définie par récurrence.*
5. $e_8 = e_3 + (8-3)r$ *(relation entre deux termes quelconques de la suite. On trouve ensuite* r*. Écrire ensuite une relation reliant* e_3 *et* e_0 *pour calculer* e_0
6. *Mêmes idées que la question précédente, à adapter au cas d'une suite géométrique.*
7. *L'exemple le plus facile ! La suite est CONSTANTE.*
8. *Mêmes idées que les questions 5 et 6, et aussi simple si on est prêt à trouver une raison irrationnelle...*

Exercice 2 (**Démonstration par récurrence**).

1. *On trouve* $u_1 = \sqrt{10}, u_2 = \sqrt{11}, u_3 = \sqrt{12}$. *Comme on a aussi* $u_0 = 3 = \sqrt{9}$, *cela conduit à la conjecture suivante : pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n+9}$, *qui se démontre sans problème par récurrence (partir de* $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$ *dans L'hérédité et l'hypothèse de récurrence). Commentaire : pour trouver la conjecture, remarquez bien qu'à chaque fois que l'indice augmente de 1, la quantité sous la racine aussi, cela conduit à une formule du type* $u_n = \sqrt{n + quelquechose}$, *on trouve facilement la fin en regardant les premiers termes calculés.*

   Deuxième façon sans utiliser la récurrence
   On a $u_{n+1}^2 = u_n^2 + 1$. *Donc la suite* (v_n)*, de terme général* $v_n = u_n^2$*, arithmétique de raison* 1. *Donc pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + n = 9 + n$. *Donc* $u_n = \sqrt{n+9}$.

2. *Commencer par raisonner ainsi : calculer* u_1 *et* u_2 *grâce à la relation de récurrence. On peut ensuite faire le raisonnement suivant : si la formule explicite donnée est vraie, je peux alors calculer* u_0, u_1 *et* u_2 *(qui sont connues) en fonction de* a, b *et* c *(c'est le même principe que la méthode pour les suites récurrentes linéaires doubles pour trouver la valeur de* λ *et* μ*). On en déduit ensuite* a, b *et* c *en résolvant le système obtenu. On trouve* $a = 1, b = -12$ *et* $c = 0$. *Ce n'est pas fini. Il reste à montrer que la formule est valable pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *(alors qu'on sait juste pour le moment qu'elle est vraie pour* $n = 0$, 1 *et* 2. *On montre cela par récurrence en remplaçant* a, b *et* c *par les valeurs trouvées. L'hérédité se fait à l'identique par rapport au premier point de l'exercice.*

   Deuxième façon sans utiliser la récurrence
   On a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} - u_k = 2k + 1$ *d'après les données de l'énoncé.*
   D'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n}(2k - 11)$. *Or* $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_n$ *(télescopage) et* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k-11) = 2\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} 11 = n(n-1) - 11n = n^2 - 12n.$

Exercice 3 (**Expression explicite d'une suite arithmetico-géométrique**).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $u_0 = 14$ *et* $u_{n+1} = 6 - \frac{1}{2}u_n$.

1. *Calculer* u_1, u_2 *et* u_3.
2. *Représenter les droites d'équation* $y = x$ *et* $y = 6 - 0,5x$, *puis conjecturer* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *et les variations de la suite.*
3. *Donner une expression explicite de* u_n *pour* $n \in \mathbb{N}$, *calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, *puis* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 4 (**Suites couplées**).

On définit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in N}$ *par* $a_0 = 0$ *et* $b_0 = 12$, *puis pour* $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3}$ *et* $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4}$

1. *On considère la suite* (u_n) *définie, pour* $n \in \mathbb{N}$, *par* $u_n = b_n - a_n$.

(a) *Montrer que la suite* (u_n) *est une suite géométrique de raison* $\frac{5}{12}$ *et de premier terme à préciser.*
On a $u_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} - \frac{a_n + 3b_n}{4} = \frac{5a_n - 5b_n}{12} = \frac{5}{12}u_n$. *Donc* (u_n) *est une suite géométrique de raison* $\frac{5}{12}$ *et son premier terme* $u_0 = a_0 - b_0 = -12$.

(b) *On déduit de a) que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\frac{5}{12}\right)^n u_0$, *soit* $u_n = -\frac{5^n}{12^{n-1}}$.

2. *On considère la suite* (v_n) *définie, pour tout entier naturel* n, *par* $v_n = 4b_n + 3a_n$.

   (a) $v_{n+1} = 4b_{n+1} + 3a_{n+1} = \frac{4(a_n + 3b_n)}{4} + \frac{3(2a_n + b_n)}{3} = 3a_n + 4b_n = v_n$.
   Donc la suite (v_n) *est constante.*

   (b) *On a pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 = 4b_0 + 3a_0 = 48$.

3. *A l'aide des questions 1(b) et 2(b) , calculer les expressions de* a_n *et* b_n *pour tout entier naturel* n.
4. *Calculer* $S_n = b_0 + b_1 + ... + b_n$ *en fonction de* n.

Exercice 5 (Ecriture rationnelle vs écriture périodique).

On remarque que $u_1 = \frac{1}{100}u_0 = 0,0027$ *et* $u_2 = \frac{1}{100}u_1 = 0,000027$. *Ainsi* $0,2727 = u_0 + u_1$ *et* $0,272727 = u_0 + u_1 + u_2$. *Ainsi, pour* $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \underbrace{0,27\cdots 27}_{n-1\ fois}$. *Or, il est facile de calculer explicitement* S_n *(somme de référence !). Le nombre cherché est ensuite obtenu via un calcul simple de limite (de référence aussi). Pour le nombre,* $0,999999\cdots$, *on adapte avec la suite géométrique de raison* $\frac{1}{10}$ *et de premier terme* $0,9$. *Le reste est identique.*

Exercice 6 (Une suite homographique).

La suite (u_n) *est définie par* $u_0 = \frac{1}{4}$ *et* $u_{n+1} = \frac{3u_n}{2u_n - 1}$ *pour* $n \in \mathbb{N}$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $v_n = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{2}$.
On admet que les termes u_n *et* v_n *sont définis pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
1. Montrer que (v_n) *est une suite géométrique* *2. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *exprimer* v_n *puis* u_n *en fonction de* n.

Exercice 7 (Changement de suites divers).

1. Soit u *la suite définie par :* $u_1 = 2$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 2\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}u_n$
(a) Montrer que la suite v *définie par : pour tout entier* $n \geqslant 1 v_n = \frac{n+1}{n}u_n$ *est géométrique.* *(b) En déduire la valeur de* u_n *en fonction de* n.
2. Soit u *la suite définie par* $u_0 = 3$ *et pour tout entier* n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 1} + 1$.
(a) Montrer que pour tout entier n, u_n *est défini et* $u_n > 1$.
(b) Montrer que la suite v *définie par* $v_n = \ln(u_n - 1)$ *est définie et est géométrique.*
(c) En déduire la valeur de u_n *en fonction de* n.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite telle que* $u_1 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{4u_n}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de terme général* $v_n = \ln u_n$.
(a) Montrer par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$ *: « u_n défini et $u_n > 0$ »* *(b) Montrer que :* $\forall n \geqslant 1, v_{n+1} = \ln 2 + \frac{1}{2}v_n$.
(c) Déduire les termes généraux de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *puis* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. *Le vérifier en calculant de 2 manières* u_1 *et* u_2.
(d) Étudier la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 8 (Comparaison avec une suite géométrique).

1. Soit u *telle que* $u_0 = 3$ *et :* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant 2u_n$ *Montrer par récurrence que :* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 3 \cdot 2^n$ *Étudier la convergence.*
2. Soit v *positive telle que* $v_0 = 3$ *et :* $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}v_n$ *Montrer par récurrence que :* $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant 3 \cdot (\frac{1}{2})^n$ *Étudier la convergence.*

Exercice 9 (Limite de suite (classique)). *Soit* u *de terme général* $\frac{n!}{a^n}$.

1. ***Si 0⩽a⩽1 :*** *. Déterminer la limite de* u.
2. ***Si a>1 :*** *(a) Montrer qu'à partir d'un certain rang* n_0 *:* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 2$. *(b) Déduire que si* $n \geqslant n_0$ *alors :* $u_n \geqslant 2^{n-n_0}u_{n_0}$.
   (c) Déduire la limite de u.

Exercice 10 (Suite récurrente (classique)). *Soit u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$.*

1. *Étudier le polynôme $P(X) = X^2 - X - 12$ (factorisation, signe, solutions de $P(x) = 0$)*
2. *Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: "u_n est défini et $0 < u_n < 4$"*
3. *Montrer par récurrence que u est strictement croissante.*
   Variante astucieuse : combiner une quantité conjuguée avec la question 1.
4. *(a) Déduire que u converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$. (b) Déduire de la question 2 un encadrement de l.*
   (c) Montrer que l vérifie $P(l) = 0$. (d) Déduire des questions précédentes la valeur de l.

Exercice 11 (Limites de suites).

1. *Calculer la limites des suites suivantes, par la méthode de votre choix.*

   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} - 2$ | *(b)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n - 2n^3}{n^2 + 1}$. | *(c)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 + 3(-1)^n}{2n}$

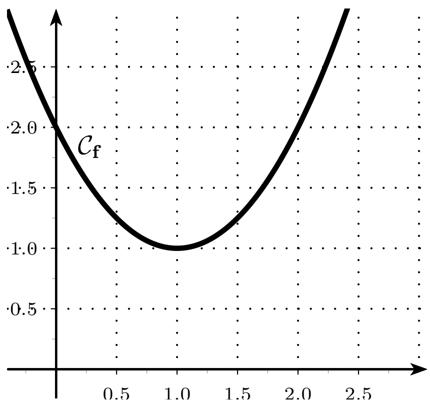
2. *Dans ces questions, on veut démontrer "à la main" plusieurs résultats qui sont utilisés dans la pratique :*
   (a) *On suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$*

      i. *Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$* | ii. *Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$*

   (b) *Soit $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$. On suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = l + l'$.*

Exercice 12 (Suite récurrente et conjecture graphique).

La suite (u_n) est définie par $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$. $f : x \mapsto x^2 - 2x + 2$ est représentée ci-dessous



1. *Conjectures graphiques*
   (a) ***Construire** les points $M_0(u_0; 0)$, $M_1(u_1; 0)$, $M_2(u_2; 0)$, $M_3(u_3; 0)$ et $M_4(u_4; 0)$ sur le graphique ci-dessus (sans faire de calculs et en laissant apparents les traits de construction).*
   (b) *Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sur sa convergence ?*
2. *Démonstration des conjectures précédentes.*
   (a) *Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.*
   (b) *Donner une expression factorisée de $u_{n+1} - u_n$. En déduire le sens de variation de la suite.*
   (c) *Montrer que la suite est convergente et déterminer sa limite.*

Exercice 13 (Suite et absurde).

Soit f définie par : $f(x) = \ln(x) + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. *(a) La fonction f est définie sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de deux fonctions croissantes (b) On a $f(x) - x = \ln x$. Donc $f(x) - x$ est négatif sur $]0\,;1[$ et positif sur $]1\,;+\infty[$.*
2. *Soit u la suite définie par $u_0 > 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$*

   (a) *Montrer que pour tout entier n : $u_n \geq 1$ et en déduire que la suite est croissante.*

(b) *Montrer qu'elle n'est pas majorée est déterminer sa limite.*

On suppose à présent que $u_0 = e$

(c) *Montrer que, pourt tout entier* n : $u_{n+1} \geq u_n + 1$, *en déduire que* $u_n \geq n + e$ *et retrouveer la limite de la suite.*

3. *Soit* v *définie par* $v_0 \in]0, 1[$ *et pour tout entier* n, $v_{n+1} = f(v_n)$
Montrer qu'il existe un entier n *pour lequel* $v_n < 0$ *et en déduire qu'elle n'est plus défnie à partir de* $n+1$.

Exercice 14 (Suite définie par une somme).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$.

1. *Quels sont les plus petit et plus grand terme de la somme ? En déduire que* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *on a :* $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leqslant w_n \leqslant \dfrac{n^2}{n^2+1}$
2. *A l'aide de la question précédente, calculer* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n$.

Exercice 15 (Différentes méthodes).

Soient (a_n) *et* (b_n) *deux suites définies par* $a_0 = 2$, $b_0 = 0$ *et les relations suivantes.* $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases}$

Les questions 2, 3 et 4 permettent de déterminer le terme général de ces suites de 3 manières indépendantes.

1. *Calculer* $a_1 = 2a_0 + b_0 = 4$, $b_1 = a_0 + 2b_0 = 2$, $a_2 = 2a_1 + b_1 = 10$ *et* $b_2 = a_1 + 2b_1 = 8$
2. ***Méthode 1 :***

(a) *Posons pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $s_n = a_n + b_n$. *Montrons que* (s_n) *est géométrique et déterminons son terme général. On a pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $s_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_n + b_n + a_n + 2b_n = 3(a_n + b_n) = 3s_n$. *Donc* (s_n) *est géométrique de raison* 3 *et de premier terme* $s_0 = a_0 + b_0 = 2$. *Donc*$s_n = 3^n s_0 = 2 \times 3^n$

(b) *Posons pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $d_n = a_n - b_n$. *Montrons que* (d_n) *est constante et déterminons son terme général. On a pour tout* $n \in \mathbb{N}$:$d_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = 2a_n + b_n - a_n - 2b_n = a_n - b_n = d_n$. *Donc* (d_n) *est constante et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $d_n = d_0 = 2$.

(c) *On a* $a_n = \dfrac{s_n + d_n}{2} = \dfrac{2 \times 3^n + 2}{2} = 3^n + 1$ *et* $b_n = \dfrac{s_n - d_n}{2} = \dfrac{2 \times 3^n - 2}{2} = 3^n - 1$

3. ***Méthode 2 :***

(a) $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = (2a_{n+1} + b_{n+1}) - 4a_{n+1} + 3a_n = -2a_{n+1} + b_{n+1} + 3a_n = -2(2a_n + b_n) + (a_n + 2b_n) + 3a_n = 0$.

(b) *Déterminons le terme général de* (a_n). *Considérons l'équation* $X^2 - 4X + 3 = 0$. *Cete équation a deux solution à savoir* $X_1 = 1$ *et* $X_2 = 3$. *Donc* $a_n = \alpha + \beta 3^n$ *où* $(\alpha,\ \beta)$ *est la solution du système :* $\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha + 3\beta = 4 \end{cases}$ *La résolution de ce système donne* $\alpha = \beta = 1$. *Donc, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 3^n + 1$.

(c) *On a, d'après la relation de récurrence (1),* $b_n = a_{n+1} - 2a_n = 3^{n+1} + 1 - 2(3^n + 1) = 3 \times 3^n + 1 - 2 \times 3^n - 2 = 3^n - 1$.

4. ***Méthode 3 :***

(a) *Soit* X_n *la matrice colonne* $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ *et* A *la matrice* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. *On a* $X_{n+1} = AX_n$. *Montrons par récurrence que :* $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.
Pour $n = 0$, $X_n = A^n X_0$.
Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$? $X_n = A^n X_0$. *Montrons que* $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$. *En effet;*

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n \\ &= AA^n X_0 \text{ d'près l'hypothèse de récurrence} \\ &= A^{n+1} X_0. \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.

(b) *On définit la suite* (α_n) *par* $\alpha_0 = 0$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+1} = 3\alpha_n + 1$. *Montrons que :* $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n + 1 & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_n + 1 \end{pmatrix}$

On a $A^0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 + 1 & \alpha_0 \\ \alpha_0 & \alpha_0 + 1 \end{pmatrix}$

Supposons que $A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n + 1 & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_n + 1 \end{pmatrix}$

Montrons que $A^{n+1} = \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} + 1 & \alpha_{n+1} \\ \alpha_{n+1} & \alpha_{n+1} + 1 \end{pmatrix}$

(c) *On considère la suite* (β_n) *définie par* $\beta_n = \alpha_n + \dfrac{1}{2}$. *La suite* (β_n) *est géométrique de raison* 3 *et on a, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n = 3^n \beta_0$. *Donc* $\alpha_n + \dfrac{1}{2} = 3^n(\alpha_0 + \dfrac{1}{2})$, *soit* $\alpha_n = \dfrac{3^n}{2} - \dfrac{1}{2}$.

(d) *Déduire les termes généraux de* (a_n) *et* (b_n)

Exercice 16 (Suite et puissance de matrice). *Soit* u *définie par* $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que* P *est inversible et calculer* P^{-1}.
2. *Soit* $D = P^{-1}AP$. *Déterminer* D^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
3. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}A^nP$ *et déduire une expression de* A^n.
4. *Soit* $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. *Vérifier que pour tout* $n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$
5. *Déduire une expression de* X_n *en fonction de* A^n *et* X_0. *Puis déduire le terme général de* u.

Exercice 17 (Puissance de matrice et récurrence - EML 2003).

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre trois et on considère les matrices suivantes de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *:*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer* A^2 *et* A^3, *puis vérifier :* $A^3 = A^2 + 2A$.
2. *Montrer que, pour tout entier* n *supérieur ou égal à* 1, *il existe un couple* (a_n, b_n) *de nombres réels tel que :* $A^n = a_nA + b_nA^2$, *et exprimer* a_{n+1} *et* b_{n+1} *en fonction de* a_n *et* b_n.
3. (a) *Montrer, pour tout entier* n *supérieur ou égal à 1 :* $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$.
   (b) *En déduire* a_n *et* b_n *en fonction de* n, *pour tout entier* n *supérieur ou égal à* 1.
   (c) *Donner l'expression de* A^n *en fonction de* A, A^2 *et* n, *pour tout entier* n *supérieur ou égal à* 1.

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre trois et on considère les matrices suivantes de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *:*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I. Première partie

1. *On a* $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   et $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   enfin $A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A^3$

2. L'existence se prouve par récurrence :

- ⋆ *Pour $n = 1$ on a $A^1 = 1A + 0A^2$ donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$ conviennent.*
- ⋆ *Soit $n \geq 1$ tel qu'il existe a_n et b_n réels avec $A^n = a_nA + b_nA^2$*
  alors $A^{n+1} = A^nA = \left(a_nA + b_nA^2\right)A = a_nA^2 + b_nA^3 = a_nA^2 + b_n\left(A^2 + 2A\right) = 2b_nA + (a_n + b_n)A^2$
  Donc $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$ (réels) conviennent
- ⋆ *Donc pour tout entier n, il existe des uniques a_n et b_n tels que $A^n = a_nA + b_nA^2$ et on a $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$*

3. (a) Comme $a_{n+1} = 2b_n$ pour tout $n \geq 1$, on a aussi $a_{n+2} = 2b_{n+1}$ pour tout entier n.
Comme $b_{n+1} = a_n + b_n$ pour tout $n \geq 1$ on a $a_{n+2} = 2a_n + 2b_n$
et comme $b_n = \frac{1}{2}a_{n+1}$ pour $n \geqslant 1$ on a finalement $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$

(b) La suite a est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants
Son équation caractéristique est : $X^2 - X - 2 = 0$ qui a pour racines $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$
Donc pour tout $n \geqslant 1$ on a $a_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^2$.
Comme $A = 1A + 0A^2$ et que $A^2 = 0A + 1A^2$ on a $a_1 = 1$ et $a_2 = 0$ donc α et β sont solutions de

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 = \alpha(-1)^1 + \beta 2^1 \\ a_2 = \alpha(-1)^2 + \beta 2^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} 1 = -\alpha + 2\beta & \\ 0 = \alpha + 4\beta & L_2 + L_1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 1 = -\alpha + 2\beta \\ 1 = 6\beta \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha = -2/3 \\ \beta = 1/6 \end{array}\right.$$

donc pour tout entier $n \geq 1$, $a_n = -\dfrac{2}{3}(-1)^n + \dfrac{1}{6}2^n$
et en reportant dans $b_n = \dfrac{1}{2}a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(-1)^n + \dfrac{1}{6}2^n$ pour tout $n \geq 1$

(c) Finalement on trouve que $A^n = \left(-\dfrac{2}{3}(-1)^n + \dfrac{1}{6}2^n\right)A + \left(\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{6}2^n\right)A^2$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Exercice 18 (Suites et matrices). *On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$*

1. *Démontrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1 - 2u_n & 2u_n \\ u_n & -u_n & 1 + u_n \end{pmatrix}$.*
2. *Calculer u_n en fonction de n puis expliciter A^n.*

Exercice 19 (D'après ECRICOME T 2007).

On se propose de déterminer la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence : $\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+2} & = & 5u_{n+1} - 6u_n \\ u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 1 \end{array}\right.$
sans utiliser *les résultats du cours sur les suites récurrentes doubles. On définit la matrice A par : $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.*

Calcul de la puissance n-ème de A

On considère les matrices à coefficients réels B et C définies par : $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

1. *On a $BC = CB = 0$ et $B^2 = B$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = B$.*
2. *On note $P(n) \ : \ C^n = (-1)^{n-1}C$*
   Pour $n = 1$, $C^1 = (-1)^{1-1}C$ donc $P(1)$ est vraie.
   Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier non nul n. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.
   On a $C^{n+1} = C^nC = (-1)^{n-1}CC = (-1)^nC$ car $C^2 = -C$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $C^n = (-1)^{n-1}C$.
3. *On a $A^2 = \begin{pmatrix} 19 & -30 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ et $5A - 6I = \begin{pmatrix} 25 & -30 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -30 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$.*
   Donc $A^2 = 5A - 6I$.
4. *Il résulte de 3) que $A\dfrac{5I - A}{6} = I$. Donc A est-inversible et $A^{-1} = \dfrac{5I - A}{6}$.*

5. *Pour $n = 0, A^n = I = B - C = 3^n B - 2^n C$.*
   Supposons que $A^n = 3^n B - 2^n C$ pour un entier naturel, montrons que $A^{n+1} = 3^{n+1}B - 2^{n+1}C$.
   On a $A^{n+1} = A^n A = (3^n B - 2^n C)(3B - 2C) = 3^{n+1}B^2 + 2^{n+1}C^2 = 3^{n+1}B - 2^{n+1}C$ car $BC = CB = 0$, $B^2 = B$ et $C^2 = -C$.
   Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = 3^n B - 2^n C$.
6. *On a $A(\frac{1}{3}B - \frac{1}{2}C) = (3B - 2C)(\frac{1}{3}B - \frac{1}{2}C) = B^2 + C^2 = B - C$ (d'après 1)). Comme $B - C = I$, on a $A(\frac{1}{3}B - \frac{1}{2}C) = I$. Donc $A^{-1} = \frac{1}{3}B - \frac{1}{2}C$.*
7. *Montrons que pour tout entier naturel n : $\left(A^{-1}\right)^n = \frac{1}{3^n}B - \frac{1}{2^n}C$*

En remarquant que $\left(A^{-1}\right)^n = \left(A^n\right)^{-1}$, il suffit de montrer que $A^n(\frac{1}{3^n}B - \frac{1}{2^n}C) = I$. En procédant comme dans 6)) on a $A^n(\frac{1}{3^n}B - \frac{1}{2^n}C) = (3^n B - 2^n C)(\frac{1}{3^n}B - \frac{1}{2^n}C) = B^2 + C^2 = B - C = I$. Donc $\left(A^{-1}\right)^n = \frac{1}{3^n}B - \frac{1}{2^n}C$

Expression de u_n en fonction de n

1. *On a pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5u_{n+1} - 6u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.*
2. *Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$*

   On note $P(n)$: $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   On a $\begin{pmatrix} u_{0+1} \\ u_0 \end{pmatrix} = A^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Donc $P(0)$ est vraie.
   Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier naturel, montrons que $P(n+1)$ est vraie.
   En effet, on a $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = AA^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'après l'hypothèse de récurrence.
   Donc $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Donc $P(n+1)$ est vraie.
   Conclusion : pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. *Donner ainsi l'expression de u_n en fonction de n.*
   Il résulte de ce qui précède que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = (3^n B - 2^n C) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit $u_n = 2^{n+1} - 3^n$.

Exercice 20 (Suites et matrices)**. *Système linéaire de deux suites récurrentes*** *: on note A, P, D les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

On définit les suites (x_n) et (y_n) par : $\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0, \quad y_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = 5x_n + y_n \\ y_{n+1} = -4x_n \end{array} \right. \end{array} \right.$ et on pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

1. *Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}. Vérifier que l'on a $D = P^{-1}AP$.*
2. *Donner, sans démonstration, l'expression de D^n pour n entier naturel.*
3. *Exprimer A en fonction de P, P^{-1} et D, puis montrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$*
   En déduire l'écriture matricielle de A^n en fonction de n.
4. *Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$.*
5. *Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$. En déduire l'expression de x_n et y_n en fonction de n.*

Puissance d'une matrice *: Soient B et I_3 les matrices suivantes :*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que $B^2 = 5B - 4I_3$.*

2. *Pour n entier naturel on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$: « il existe deux réels a_n et b_n tels que $B^n = a_nB+b_nI_3$ ».*
   (a) *Montrer que $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$ sont vraies et déterminer les couples (a_0, b_0), (a_1, b_1), et (a_2, b_2).*
   (b) *On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.*
   (c) *Utiliser la première partie de l'exercice pour exprimer a_n et b_n en fonction de n.*
   (d) *Conclure en donnant l'écriture matricielle de B^n.*

Exercice 21 (**Suites adjacentes**). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k-1}$.*

1. (a) *Montrer que pour tout $n \geqslant 1$: $\dfrac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)-1} + \dfrac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)-1} = \dfrac{-2}{(4n+1)(4n+3)}$*
   (b) *Montrer que la suite v de terme général $v_n = u_{2n}$ est décroissante. On utilisera le cas particulier de Chasles : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n} + \sum_{k=2n+1}^{2n+2}$*
2. *Montrer de même que la suite w de terme général $w_n = u_{2n+1}$ est croissante. On utilisera le cas particulier de Chasles : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+3} = \sum_{k=1}^{2n+1} + \sum_{k=2n+2}^{2n+3}$.*
3. *Calculer (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) $w_n - v_n$ puis donner la limite de cette suite.*
4. *Montrer que v et w convergent vers une même limite l.*
   Épilogue : *Lorsque $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite l, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l aussi. Nous avons donc démontré dans cette exercice que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.*

Exercice 22 (Changement de suite (difficile) ECRICOME 1999). *Soit (x_n) une suite numérique qui vérifie, pour tout entier naturel n, la relation : $x_{n+2} = \dfrac{1}{3}x_{n+1} + \dfrac{1}{3}x_n$.*

1. *Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ (on donne : $\frac{1+\sqrt{13}}{6} = 0,77$ et $\frac{1-\sqrt{13}}{6} = -0,44$ à 10^{-2} près).*
2. *Soient $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$. On étudie la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = a$ $u_1 = b$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$ On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et vérifie $u_n \geqslant 1$*
   Montrer que la seule limite possible de la suite (u_n) est 4.
3. *Soit (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$.*
   (a) *Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.*
   (b) *Vérifier, pour tout entier naturel n : $v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1}+v_n}{2(2+v_{n+2})}$. En déduire que : $|v_{n+2}| \leqslant \dfrac{1}{3}\left(|v_{n+1}| + |v_n|\right)$.*
   (c) *On note (x_n) la suite définie par : $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et, pour tout entier naturel n, $x_{n+2} = \dfrac{1}{3}x_{n+1} + \dfrac{1}{3}x_n$.*
   Montrer que, pour tout entier naturel n, $|v_n| \leqslant x_n$ et conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

Exercice 23 (**Suites adjacentes (difficile)**).

1. (a) Soit f la fonction définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x+1}{x}$ et g la composée $g = fof$ définie par $g(x) = f(f(x))$. Etudier les sens de variation sur $\mathbb{R}^+$ de f et de g.

(b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation de $f(x) = x$, puis $g(x) = x$. (On montrera qu'elles ont les mêmes solutions solutions a et b avec $b < 0 < a$, que $b = -1/a$ et que $b = 3 - a$)

Soit u la suite définie par : $u_0 > 0$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Montrer que, $\forall n$, u_n est défini et $u_n > 0$

3. On suppose dans cette question que $u_0 = 1$. On définit les suites v et w par : $\forall n$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1} = f(v_n)$.

(a) Montrer que pour tout entier n, $v_{n+1} = g(v_n)$.

(b) Montrer que la suite v et croissante majorée par a. En déduire que v converge vers a.

(c) En déduire que w converge également vers a. Conclure pour u en utilisant le résultat suivant, admis : si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, alors u converge vers cette limite.

4. On pose pour tout entier n, $z_n = \dfrac{u_n - a}{u_n - b}$. *(les valeurs a et b étant celles définies précédemment).*
On ne suppose plus que $u_0 = 1$ *mais seulement que* $u_0 > 0$.
(a) Montrer que, pour tout entier n, z_n *est bien définie et que z est une suite géométrique.*
(b) Déterminer la valeur de u_n *en fonction de* z_n. *Déterminer sa limite quand n tend vers l'infini.*

Exercice 24 (HEC 2013). *Sur le marché d'un certain bien, on note D la fonction de demande globale (des consommateurs), O la fonction*

d'offre globale (des entreprises) et p le prix de vente du bien.

On suppose habituelement que la fonction $D : p \longmapsto D(p)$ *définie sur* $\mathbb{R}^+$ *à valeurs réelles est décroissante et que*

la fonction $O : p \longmapsto O(p)$ *définie sur* $\mathbb{R}^+$ *à valeurs réelles est croissante.*

Si l'équation $O(p) = D(p)$ *admet une solution* p^*, *on dit que* p^* *est un prix d'équilibre du marché.*

Avant d'atteindre un niveau d'équilibre, le prix p peut être soumis à des fluctuations provoquées par des excès d'offre $(O(p) > D(p))$ *ou des excès de demande* $(D(p) > O(p))$*au cours du temps.*

Afin de rendre compte de cette évolution, on note pour tout $n \in \mathbb{N}, \shortmid_n$ *la valeur du prix à l'instant n.*

On suppose que la demande dépend de la valeur du prix selon la relation $D_n = D(p_n)$ *valable pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Quant aux entreprises, elles adaptent à chaque instant $n \in \mathbb{N}$, *la quantité offerte* O_n *à l'instant n à un prix anticipé à l'instant* $(n-1)$, *noté* $\hat{p}_n$, *selon la relation* $O_n = O(\hat{p}_n)$, *où* $\hat{p}_0$ *peut être interprété comme un prix d'étude de marché.*

On suppose qu'à chaque instant, l'offre est égale à la demande, c'est-à-dire : pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathbb{O}_n = D_n$.

Dans toute cette partie, on considère quatre paramètres réels strictement positifs a, b, c, d, *avec* $a > d$, *et on suppose que les fonctions D et O sont définies sur* $\mathbb{R}^+$ *par :* $D(p) = a - bp$ *et* $O(p) = cp + d$.
Par suite, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathbb{D}(p_n) = a - bp_n$ *et* $O(\hat{p}_n) = c\hat{p}_n + d$.

1. *Dans cette question uniquement, les réels a, b, c, d ont les valeurs suivantes :*$a = 40, b = 8, c = 2$ *et* $d = 20$.
   Ainsi on a :
   **Pour tout réel* $p \geqslant 0, D(p) = 40 - 8p$ *et* $O(p) = 2p + 20$
   **pour tout* $n \in \mathbb{N}, \mathbb{D}(p_n) = 40 - 8p_n$ *et* $O(\hat{p}_n) = 2\hat{p}_n + 20$.
   On suppose que p_0 *et* p_1 *sont donnés et que pour tout entier* $n \geqslant 2$, *on a :* $\hat{p}_n = 2p_{n-1} - p_{n-2}$.
   (a) *Etablissons l'existence et l'unicité d'un prix d'équilibre* p^* :
   $$\begin{aligned} D(p) = O(p) &\Longleftrightarrow 40 - 8p = 2p + 20 \\ &\Longleftrightarrow p = p^* = 2 \end{aligned}$$
   (b) *pour tout* $n \geqslant 2$, *on sait que :*
   $*\hat{p}_n = 2p_{n-1} - p_{n-2}$.
   **pour tout* $n \in \mathbb{N}, \mathbb{D}(\shortmid_n) = O(\hat{p}_n) \Longleftrightarrow 40 - 8p_n = 2\hat{p}_n + 20$.
   $\Leftrightarrow 40 - 8p_n = 2(2p_{n-1} - p_{n-2}) + 20$
   $\Longleftrightarrow 8p_n = 20 - 4p_{n-1} + 2p_{n-2}$
   $\Longleftrightarrow \boxed{p_n = -\frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} + \frac{5}{2}}$.
   (c) *On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $v_n = p_n - p^*$.*Montrons que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.*
   pour tout $n \geqslant 2$, *on sait que :*$p_n = -\frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2} + \frac{5}{2}$
   et posant $v_n = p_n - 2, v_{n-1} = p_{n-1} - 2, v_{n-2} = p_{n-2} - 2$, *on obtient :*
   $v_n + 2 = -\frac{1}{2}(v_{n-1} + 2) + \frac{1}{4}(v_{n-2} + 2) + \frac{5}{2}$
   $\Leftrightarrow v_n = -\frac{1}{2}v_{n-1} + \frac{1}{4}v_{n-2} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 2$
   $\Leftrightarrow \boxed{\text{pour tout } n \geqslant 2 : v_n = -\frac{1}{2}v_{n-1} + \frac{1}{4}v_{n-2}}$
   Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bien une suite récurrente linéaire d'ordre 2.*

(d) *L'équation caractéristique de la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est l'équation* :$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$,*dont les solutions distinctes sont* $r_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ *et* $r_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

(e) *Il existe ainsi deux réels* h, k *tels que pour tout* $n \in \mathbb{N}, v_n = hr_1^n + kr_2^n$

En particulier :$\begin{cases} v_0 = h + k \\ v_1 = hr_1 + kr_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = \dfrac{r_2 v_0 - v_1}{r_2 - r_1} \\ k = \dfrac{v_1 - r_1 v_0}{r_2 - r_1} \end{cases}$

donc :pour tout $n \in \mathbb{N}, \succapprox_n = \frac{r_2 v_0 - v_1}{r_2 - r_1} r_1^n + \frac{v_1 - r_1 v_0}{r_2 - r_1} r_2^n$

$\Leftrightarrow$*pour tout* $n \in \mathbb{N}$,$p_n = p^* + \frac{r_2 v_0 - v_1}{r_2 - r_1} r_1^n + \frac{v_1 - r_1 v_0}{r_2 - r_1} r_2^n$

(f) *Comme la fonction racine carrée est strictement croissante sur* $\mathbb{R}^+ : 4 < 5 < 9 \Longrightarrow 2 < \sqrt{5} < 3$,

donc on obtient les encadrements :$\begin{cases} \frac{1}{4} < r_1 < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} < r_2 < 1 \end{cases}$

et par la limite usuelle :$\forall q \in]-1, 1[,\ \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$, *on a aussi* : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_1^n = 0, \lim\limits_{n\to+\infty} r_2^n = 0$

donc la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bien convergente telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = p^*$.

Avec n grand, le marché tend vers sa position d'équilibre.

2. *Soit* β *un paramètre réel vérifiant* $0 < \beta \leqslant 1$. *On suppose que le prix* p_0 *est donné et que les anticipations de*
prix sont adaptatives , c'est-à-dire que pour tout entier $n \geqslant 1$, *on a* : $\hat{p}_n = \hat{p}_{n-1} + \beta(p_{n-1} - \hat{p}_{n-1})$

(a) *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *le prix courant* p_n *et prix anticipé* $\hat{p}_n$ *doivent vérifier la relation* $\mathbb{D}(\imath_n) = O(\hat{p}_n)$

donc :$a - bp_n = c\hat{p}_n + d \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$,$p_n = \frac{a-d}{b} - \frac{c}{b}\hat{p}_n$

(b) *Ainsi pour tout* $n \in \mathbb{N}^*, \hat{p}_n = \hat{p}_{n-1} + \beta(p_{n-1} - \hat{p}_{n-1})$ *et* $p_{n-1} = \frac{a-d}{b} - \frac{c}{b}\hat{p}_{n-1}$

donc

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{a-d}{b} - \frac{c}{b}(\hat{p}_{n-1} + \beta(p_{n-1} - \hat{p}_{n-1})) \\ &= p_{n-1} - \frac{c}{b}\beta p_{n-1} + \frac{c\beta}{b}\hat{p}_{n-1} \\ &= p_{n-1} - \frac{c}{b}\beta p_{n-1} + \beta\left(\frac{a-d}{b} - p_{n-1}\right) \\ &= \left(1 - \beta\left(\frac{c}{b} + 1\right)\right) p_{n-1} + \beta\frac{a-d}{b} \end{aligned}$$

Ainsi : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*le prix* p_n *vérifie bien l'équation de récurrence* :$p_n = \left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right) p_{n-1} + \beta\frac{a-d}{b}$

(c) *Rappelons que le prix d'équilibre* p^* *est obtenu ss'il existe* $\boxed{p > 0}$ *tel que* $D(p) = O(p) \Leftrightarrow a - bp = cp + d \underset{\boxed{a>d}}{\Leftrightarrow} p = \boxed{\frac{a-d}{c+b} = p^*}$

On reconnaît que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est arithmético-géométrique.*

Soit x le réel solution de l'équation : $x = \left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)x + \beta\frac{a-d}{b} \Longleftrightarrow \boxed{x = \frac{a-d}{c+b} = p^*}$

Alors la suite (v_n) *définie par* $v_n = p_n - p^*$ *est géométrique de raison* $q = \left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)$, *1er terme* $v_0 = p_0 - p^*$

donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, p_n = p^* + \left(1 - \beta\frac{b+c}{b}\right)^n (p_0 - p^*)}$

(d) *En supposant que* $p_0 \neq p^*$, *la suite* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge si et seulement si :*
$1-\beta\dfrac{b+c}{b} \in \left]-1,1\right[\Leftrightarrow -2 < -\beta\dfrac{b+c}{b} < 0$
$\Leftrightarrow 0 < 1+\dfrac{c}{b} < \dfrac{2}{\beta}. \underset{\substack{c>0,b>0\\ \beta\in]0,1]}}{\Leftrightarrow} \boxed{\dfrac{c}{b} < \dfrac{2}{\beta}-1}.$

On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\beta\dfrac{b+c}{b}\right)^n(p_0-p^*) = 0$ *et* $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = p^* = \dfrac{a-d}{c+b}}$

(e) *Comme* $\beta \in \left]0,1\right]$, *alors on a successivement :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} &\geqslant 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{\beta} \geqslant 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{\beta} - 1 \geqslant 1 \end{aligned}$$

or quand $c < b, b > 0,$ *alors* $0 < \dfrac{c}{b} < 1$

Donc quand $c < b,$ *on vérifie la condition :* $\dfrac{c}{b} < \dfrac{2}{\beta} - 1$ *donc la suite la suite* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et*
$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = p^* = \dfrac{a-d}{c+b}}$