Exercice 1 (TS, centres étrangers 2008). *Le secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel :*

- *les ingénieurs*
- *les opérateurs de production*
- *les agents de maintenance*

Il y a 8 % d'ingénieurs et 82 % d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50 % des ingénieurs, 25 % des agents de maintenance et 60 % des opérateurs de production.

I. Partie A. *Dans cette partie, on interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise. On note :*

- *M l'évènement : « le personnel interrogé est un agent de maintenance » ;*
- *O l'évènement : « le personnel interrogé est un opérateur de production » ;*
- *I l'évènement : « le personnel interrogé est un ingénieur » ;*
- *F l'évènement : « le personnel interrogé est une femme ».*

1. *Construire un arbre pondéré correspondant aux données.*
2. *Calculer la probabilité d'interroger : • un agent de maintenance • une femme agent de maintenance • une femme*

II. Partie B. *Le service de maintenance effectue l'entretien des machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue ; des études ont montré que sur une journée :*

- *la probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à $0,002$;*
- *la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à $0,003$;*
- *la probabilité qu'une panne se produise est égale à $0,04$.*

On note : • A l'évènement : « l'alarme se déclenche » • B l'évènement : « une panne se produit » ;

1. *Démontrer que la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche est égale à $0,037$.*
2. *Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.*
3. *Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.*

Exercice 2 (TS, Nouvelle-Calédonie mars 2008, extraits). *Deux éleveurs produisent une race de poissons qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois :*

- *pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10 % n'ont pas survécu, 75 % deviennent rouges et les 15 % restant deviennent gris.*
- *pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5 % n'ont pas survécu, 65 % deviennent rouges et les 30 % restant deviennent gris.*

Une animalerie achète les alevins, à l'âge de deux mois : 60 % au premier éleveur, 40 % au second.

1. *Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.*
   (a) *Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de $0,92$.*
   (b) *Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.*
   (c) *Sachant que le poisson est gris à 3 mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage ?*
2. *L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1 euro si le poisson est rouge, $0,25$ euro s'il est gris et perd $0,10$ euro s'il ne survit pas.*
   Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique, arrondie au centime.

Exercice 3. *Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.*

Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie : le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé

- *si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;*
- *si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.*

A la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'événement « le jeton tiré est blanc » et G l'événement « le joueur gagne le jeu ». L'événement contraire d'un événement E sera noté $\overline{E}$. La probabilité d'un événement E sera notée p(E).

Partie A

1. *Montrer que $p(G) = \dfrac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.*
2. *Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?*
3. *Un joueur fait quatre parties de façon indépendante. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près (on pourra s'aider d'un arbre)*
4. *Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à $0,99$?*

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- *chaque joueur paie 1 € par partie • si le joueur gagne, il reçoit 5 € ; • si le joueur perd, il ne reçoit rien.*

1. *Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur après une partie.*
   (a) *Donner la loi de probabilité de X et son espérance E(X).*
   (b) *On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $E(X) < 0$. Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?*
2. *L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?*
   Toute trace de recherche, même incomplète, sera évaluée dans cette question

Exercice 4 (TS, Asie, juin 2012, extraits). *Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.*

Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches. Ces $k + 3$ boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- ⋆ *un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;*
- ⋆ *un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;*
- ⋆ *un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ;*

Un joueur joue une partie. On note Y_k la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. *(a) Justifier l'égalité : $p(Y_k = 5) = \dfrac{6k}{(k+3)^2}$. (b) Écrire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_k.*
2. *On note $E(Y_k)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y_k*
   On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $E(Y_k)$ est strictement positive.
   Déterminer les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.

Exercice 5 (Loi de Hardy-Weinberg). *Certains gènes peuvent avoir exactement deux états : l'allèle A (allèle dominant) ou a (allèle recessif).*
Un individu peut avoir, sur une paire de chromosome les génotypes suivants : AA, Aa et aa.
Lors d'un appariement entre deux individus, l'enfant obtient exactement un gène (au hasard, avec équiprobabilité) de chacun de ses parents.
On admet que les couples sont conçus entre parents de la même génération, que la proportion de chacun des génotypes est identique chez les hommes et chez les femmes et que les couples se forment indépendamment des génotypes. Dans une population donnée on note p_n, q_n et r_n les proportions respectives des génotypes AA, Aa et aa à la génération $n \in \mathbb{N}$. La génération 0 est la génération initiale.

1. ***Probabilité du génotype de l'enfant en fonction de celui des parents.***
   (a) *En considérant les génotypes de deux parents, montrer qu'il y a six types de couples différents.*
   (b) *Dans chacune de ces six situations, donner les probabilités qu'un enfant ait chaque génotype.*
2. *Dresser un arbre pondéré à trois niveaux de branches (mère de la génération n, père de la génération n, et enfant de la génération $n + 1$ (vous aurez besoin de place...).*
3. *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \left(p_n + \dfrac{q_n}{2}\right)^2$ et $r_{n+1} = \left(r_n + \dfrac{q_n}{2}\right)^2$.*

4. *Que vaut, pour $n \in \mathbb{N}$, $p_n + q_n + r_n$?*
5. *Soit $\alpha = p_0 - q_0$ et (u_n) définie par $u_n = p_n - r_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que (u_n) est constante égale à α.*
6. *Exprimer p_{n+1} et r_{n+1} en fonction de α à l'aide des deux questions précédentes.*
7. *En déduire le principe de Hardy-Weinberg : à partir de la génération 1, les proportions ne varient plus.*

Exercice 6 (Pièce truquée). *Dans un lot de 100 pièces de monnaie toutes de même apparence, ont été mélangées 60 pièces équilibrées et 40 pièces truquées. La probabilité d'apparition de « Face » lors d'un jet d'une pièce truquée est $\dfrac{3}{4}$.*

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. *On prend une pièce au hasard et on la lance. Soit T l'évènement : « la pièce est truquée » et F l'évènement : « on obtient Face ».*
   (a) *Calculer la probabilité d'obtenir « Face » (on pourra s'aider d'un arbre).*
   (b) *Quelle est la probabilité que la pièce soit truquée sachant que l'on a obtenu « Face » ?*
2. *On considère un jeu dont la mise est 10 euros, qui consiste à choisir une des 100 pièces et à la lancer. Si le résultat est face, on ne gagne rien, sinon on gagne a euros. Soit G la variable aléatoire donnant le gain algébrique du jeu.*
   (a) *Exprimer l'espérance de G en fonction de a. Comment choisir a pour que le jeux soit équitable ?*
3. *On prend une pièce au hasard et on la lance quatre fois.*
   - ⋆ *si au cours des quatre lancers on obtient quatre fois « Face », on décide d'éliminer la pièce,*
   - ⋆ *dans le cas contraire, on décide de conserver la pièce.*

   On note E l'évènement « la pièce est éliminée ».
   (a) *Quelle est la probabilité que la pièce soit éliminée sachant qu'elle est équilibrée ?*
   (b) *Quelle est la probabilité que la pièce soit conservée sachant qu'elle est truquée ?*
   (c) *Quelle est la probabilité d'avoir pris une pièce équilibrée et de l'avoir éliminée ou d'avoir pris une pièce truquée et de l'avoir conservée ?*
   (d) *Quelle est la probabilité que la pièce soit éliminée sachant qu'elle est truquée ? En déduire $P(E)$.*
4. *On suppose dans cette question que la probabilité qu'une pièce truquée tombe sur « Face » est $x \in]0;1[$. On cherche à décrire une expérience parfaitement équiprobable avec cette pièce. Pour cela :*
   - ⋆ *On effectue une série de deux lancers indépendants de la pièce :*
   - ⋆ *Si le premier lancer est pile (P_1) et le second face (F_2) on dit avoir obtenu A.*
   - ⋆ *Si le premier lancer est face (F_1) et le second pile (P_2) on dit avoir obtenu B*
   - ⋆ *Si les deux lancers donnent des résultats identiques, on recommence l'expérience.*

   (a) *Représenter la situation correspondant à une série de deux lancers par un arbre.*
   (b) *Quelle est la d'obtenir A lors de la première série de deux lancers ? d'obtenir B ? De devoir refaire une série de deux lancers ?*
   (c) *Montrer que $P(A) = x(1-x) + (x^2 + (1-x)^2)P(A)$ et en déduire $P(A)$ et conclure.*

Exercice 7 (Ecricome 2011. Extraits). ***PARTIE I. Un jeu en ligne.***

La société Lehazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.

Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

	A	B	C
1	★		
2	★		
3		★	

On définit les événements H, V, D, N par :

— *H : « les trois jetons sont alignés horizontalement ».* — *V : « les trois jetons sont alignés verticalement ».*
— *D : « les trois jetons sont alignés en diagonale ».* — *N : « les trois jetons ne sont pas alignés ».*

1. *Justifier qu'il y a* 84 *positionnements possibles des trois jetons dans les trois cases.*
2. *Déterminer les probabilités* $\mathrm{P}(H)$, $\mathrm{P}(V)$, $\mathrm{P}(D)$ *des événements* $H, .V, .D$.
3. *En déduire que la probabilité de l'événement* N *est égale à :* $\mathrm{P}(N) = \dfrac{19}{21} \simeq 0.9048$
4. *On note* Z *le gain de la société lors d'une partie. Calculer* $E(Z)$.

PARTIE III. Contrôle de la qualité du jeu.

On constate que, parfois, la fonction aléatoire est déréglée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case $(A, 1)$ *, les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes. On note* Δ *l'événement « la fonction aléatoire est déréglée »et on pose* $\mathrm{P}(\Delta) = x$ *avec* $x \in]0, 1[$.

1. *Calculer les probabilités conditionnelles* $\mathrm{P}_\Delta(H)$, $\mathrm{P}_\Delta(V)$, $\mathrm{P}_\Delta(D)$.
2. *Utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement* $\left(\Delta, \overline{\Delta}\right)$ *pour en déduire que la probabilité les jetons ne soient pas alignés est* $\mathrm{P}(N) = -\dfrac{x}{84} + \dfrac{19}{21}$.
3. *Soit* G *la variable aléatoire égale au gain réalisé par la société de jeu lors d'une partie jouée. Déterminer la valeur maximale de* x *pour que l'espérance de gain soit positive.*
4. *On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés. Quelle est la probabilité, en fonction de* x, *que la fonction aléatoire ait été déréglée ?*

Exercice 8 (ESCO 92). *Deux pièces (une chambre et la salle) A et B sont reliées entre elles de la façon suivante : A ouvre sur B et B ouvre sur l'extérieur. Une guêpe initialement (à l'instant 0) dans la pièce A voudrait sortir à l'air libre. A chaque instant* $n \in \mathbb{N}$ *son trajet obéit aux règles suivantes :*

- ⋆ *Lorsqu'elle est dans la pièce* A *au temps* n, *alors au temps* $n+1$ *elle reste en* A *avec une probabilité de* $1/3$ *et elle passe dans la pièce* B *avec une probabilité de* $2/3$.
- ⋆ *Lorsqu'elle est en* B *au temps* n, *alors au temps* $n+1$ *elle retourne en* A *avec une probabilité de* $1/4$, *elle reste en* B *avec une probabilité de* $1/2$ *et elle sort à l'air libre avec une probabilité de* $1/4$.
- ⋆ *Enfin, lorsqu'elle est à l'air libre, elle ne revient plus.*

Pour tout entier n, *on notera* A_n *l'événement "la guêpe est dans la pièce* A *à l'instant* n *" et de même* B_n.

D_n *pour "être dehors à l'instant* n *" et* S_n *l'événement "la guêpe sort à l'instant* n*".*

On notera a_n, b_n, d_n *et* s_n *leurs probabilités respectives.*

1. (a) *Déterminer les probabilités* a_0, b_0, s_0, a_1, b_1, s_1 *et* s_2.
   (b) *Sachant qu'à l'instant 2 elle est en* A, *quelle est la probabilité qu'elle ait été en* B *à l'instant* 1?
   (c) *Justifier que pour tout entier* n :
   $$A_{n+1} = (A_n \cap A_{n+1}) \cup (B_n \cap A_{n+1}) \text{ et } B_{n+1} = (A_n \cap B_{n+1}) \cup (B_n \cap B_{n+1})$$
   et en déduire pour tout entier n, *les relations de récurrence suivantes :*
   $$a_{n+1} = \tfrac{1}{3}a_n + \tfrac{1}{4}b_n \text{ et } b_{n+1} = \tfrac{2}{3}a_n + \tfrac{1}{2}b_n$$
   (d) *Montrer que pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 2a_n$.
   (e) *En déduire pour* $n \geq 1$, *l'expression de* a_n *et de* b_n *en fonction de* n.
   (f) *Calculer les limites de* a_n *et de* b_n *quand* n *tend vers* $+\infty$ *et interprèter ce résultat.*
2. (a) *Justifier que pour tout entier* $n \geq 2$, $s_n = \dfrac{1}{4}b_{n-1}$ *et en déduire* s_n *en fonction de* n.
   (b) *Déterminer la probabilité que la guêpe soit dehors à l'instant 10. (on ne cherchera pas à simplifier le résultat)*

Exercice 9 (D'après ECRICOME 2001). ***Première partie : calcul des puissances successives de la matrice*** $M(a)$

Soit $M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$, *où* a *représente un nombre réel.*

1. *Montrer que, pour tous réels* a, b, *on a :* $M(a)M(b) = M(a + b - 3ab)$.

2. *Montrer que si* $a \neq 1/3$ *il existe alors un réel* b *tel que* $a + b - 3ab = 0$. *En déduire que si* $a \neq 1/3$ *alors la matrice* $M(a)$ *est inversible.*
   Calculer $M(1/3)^2$ *et en déduire que* $M(1/3)$ *n'est pas inversible.*
3. *Déterminer le réel* a_0 *non nul, tel que :* $[M(a_0)]^2 = M(a_0)$.
4. *On considère les matrices* $P = M(a_0)$ *et* $Q = I - P$, *où* I *désigne la matrice unité d'ordre* 3.
   (a) *Montrer que pour tout* a, *il existe un réel* α *-que l'on exprimera en fonction de* a*- tel que :* $M(a) = P + \alpha Q$.
   (b) *Calculer* P^2, QP, PQ, Q^2.
   (c) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *montrer que* $[M(a)]^n$ *s'écrit* $x_n P + y_n Q$ *avec* x_n *et* y_n *des réels.*
   (d) *Expliciter alors la matrice* $[M(a)]^n$.

Deuxième partie : évolution d'un titre boursier au cours du temps.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $a \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$.

1. *On définit des suites* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *par leur premier terme* p_1, q_1, r_1, *et les relations de récurrence :*

$$\begin{cases} p_{n+1} = (1-2a)p_n + aq_n + ar_n \\ q_{n+1} = ap_n + (1-2a)q_n + ar_n \\ r_{n+1} = ap_n + aq_n + (1-2a)r_n \end{cases}$$

   (a) *Exprimer* p_n, q_n, r_n *en fonction de* n, p_1, q_1, r_1. (b) *Étudier la convergence de ces suites.*
2. *Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut monter, rester stable, ou baisser. On considère que :*
   ⋆ *le premier jour le titre est stable ;*
   ⋆ *si un jour* n, *le titre monte, le jour* $n+1$, *il montera avec la probabilité* $\dfrac{2}{3}$, *restera stable avec la probabilité* $\dfrac{1}{6}$, *et baissera avec la probabilité* $\dfrac{1}{6}$ *;*
   ⋆ *si un jour* n, *le titre est stable, le jour* $n+1$, *il montera avec la probabilité* $\dfrac{1}{6}$, *restera stable avec la probabilité* $\dfrac{2}{3}$, *et baissera avec la probabilité* $\dfrac{1}{6}$ *;*
   ⋆ *si un jour* n, *le titre baisse, le jour* $n+1$, *il montera avec la probabilité* $\dfrac{1}{6}$, *restera stable avec la probabilité* $\dfrac{1}{6}$, *et baissera avec la probabilité* $\dfrac{2}{3}$.

   On note M_n *(respectivement* S_n, *respectivement* B_n*) l'événement « le titre donné monte (respectivement reste stable, respectivement baisse) le jour* n *».*
   (a) *Exprimer les probabilités de hausse, stabilité et baisse au jour* $n+1$ *en fonction de celles au jour* n.
   (b) *En déduire les probabilités de hausse, de stabilité, et de baisse au jour* n.
   (c) *Quelles sont les limites de ces probabilités lorsque* n *tend vers l'infini ?*

Exercice 10 (Urnes, boules et suites). *On considère deux urnes :*

1. une urne verte contenant une boule rouge et 3 vertes 2. une urne rouge contenant deux boules rouges et deux vertes.

On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la façon suivante :

⋆ *le premier tirage est effectué dans l'urne verte*
⋆ *à partir du second, ils sont effectués dans l'urne dont la couleur est celle de la boule tirée précédemment.*

Pour tout entier n *non nul, on notera* V_n *le fait d'obtenir une boule verte lors du* $n^{iéme}$ *tirage,* v_n *sa probabilité et* $\mathcal{V}_n$ *le fait de l'effectuer dans l'urne verte. De même pour rouge.*

1. ***Les trois premiers tirages****. Déterminer la probabilité d'obtenir*
   (a) *la première boule verte au troisième tirage.* (b) *la première boule rouge au troisième tirage.*
   (c) *au moins une boule verte dans les 3 premiers tirages.* (d) *une seule boule rouge lors des 3 premiers tirages.*

2. ***Les deux premiers tirages***
   (a) *Si le premier tirage a donné une boule rouge, quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte au second tirage ?*
   (b) *Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte au second tirage ?*
   (c) *On a obtenu une boule verte au second tirage. Quelle est la probabilité que ce tirage ait été effectué dans l'urne rouge ?*
3. ***Le*** $n^{\text{ième}}$ ***tirage***
   (a) *Pour tout entier* $n \geq 1$, *déterminer* v_{n+1} *en fonction de* v_n *et de* r_n
   (b) *En déduire que* $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + \frac{1}{2}$, *puis l'expression de* v_n *en fonction de* n
4. ***La première rouge et la première verte***
   Soit X *la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule rouge et* Y *la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule verte.*

   (a) *Pour tout entier* $n \geq 1$, *décomposer l'événement* $(X = n)$. (b) *En déduire* $\mathrm{P}(X = n)$.
   (c) *Pour tout entier* $n \geq 1$, *décomposer l'événement* $(Y = n)$. (d) *En déduire* $\mathrm{P}(Y = n)$.

Exercice 11 (Urnes, boules et indépendance). *Une urne contient 13 boules dont 6 noires, 3 blanches et 4 rouges. On pioche 4 boules.*
On pose E : "obtenir exctement 2 blanches " et F : "obtenir exactement 2 rouges"

1. *On suppose qu'il n'y a pas remise.*
   Calculer les probabilités suivantes : $P(E \cap F)$, $P_F(E)$, $P_E(F)$. *Les évènements E et F sont-ils indépendants ?*
2. *Refaire l'exercice en supposant que l'on pioche avec remise*

Exercice 12 (Des urnes et des boules). *Une urne contient 20 boules dont 8 noires, 7 rouges et 5 blanches. On pioche sans remise 4 boules.*

1. *Calculer les probabilités des évènements suivants :*
   (a) *A =« obtenir exactement deux boules blanches »* (b) *B =« obtenir au moins une boule blanche »*
   (c) *C =« obtenir autant de boules blanches que de boules rouges »* (d) *D =« obtenir aucune boule noire »*

2. *Calculer les probabilités conditionnelles suivantes*
   $P_A(B)$, $P_B(A)$, $P_A(C)$, $P_C(A)$, $P_A(D)$, $P_D(A)$,
   $P_B(C)$, $P_C(B)$, $P_B(D)$, $P_D(B)$, $P_D(C)$, $P_C(D)$
3. *Refaire l'exercice en supposant que l'on pioche avec remise.*

Exercice 13 (Commencer par le plus facile ?). *Un archer tire sur une cible située à* 20 *m et une cible située à* 50 *m. Il effectue trois tirs en changeant de cible à chaque fois. La probabilité d'atteindre la cible à* 20 *m (resp.* 50 *m) est* p *(resp.* q*) avec* $q < p$. *On suppose que les tirs indépendants. Il gagne le jeu s'il atteint deux cibles consécutivement.*
Calculer la probabilité de gagner en commencer par la cible située à 20 *m (resp. située à* 50 *m). Par quelle cible a-t-il intérêt à commencer ?*

Exercice 14 (Pièce truquée). *On considère une suite de lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" est* p *et d'obtenir "face" est* $q = 1 - p$ $(p \in]0;1[)$. *"pile" (resp. "face") sera noté* P *(resp.* F*). Soit* A_n *l'évènement "la séquence* PF *apparait pour la première fois aux lancers* $(n-1)$ *et* n*".*
Calculer $P(A_n)$ *lorsque* (a) $n = 3$ (b) $n = 4$ (c) $n = 5$ (d) n *quelconque.*

Exercice 15 (PROBLEME (Extrait modifié ESSEC 2004)). ***I. Calcul matriciel***
Pour tout réel a, *on considère les matrices*

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1-a & (1-a)^2 & (1-a)^3 \\ 0 & a & 2a(1-a) & 3a(1-a)^2 \\ 0 & 0 & a^2 & 3a^2(1-a) \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}, \quad D(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer* P^2 *et donner l'inverse de* P.

2. *Vérifier que* $\forall a \in \mathbb{R}, \quad M(a) = PD(a)P^{-1}$.
3. *Montrer que* $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad M(a)M(b) = M(ab)$. *. En déduire que* $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad [M(a)]^n = M(a^n)$.
4. *Comment choisir* $c \in \mathbb{R}$ *pour que* $M(c) = I$ *?*
   Montrer que si $a \neq 0$, *il existe un réel* b *tel que* $M(a)M(b) = I$. *En déduire l'inverse de* $M(a)$. *La matrice* $M(0)$ *est-elle inversible ?*

II. Etude d'une expérience aléatoire

On dispose de 3 *pièces de monnaie, chacune ayant la probabilité* p *d'amener pile* $(0 < p < 1)$ *et* $1 - p$ *d'amener face. On pourra poser :* $q = 1 - p$. *On s'intéresse à l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer des lancers successifs selon le protocole suivant :*

- ⋆ *à l'étape 1, on lance les* 3 *pièces ;*
- ⋆ *à l'étape 2, on lance les pièces ayant amené pile à l'étape 1 (s'il en existe) ;*
- ⋆ *à l'étape 3, on lance les pièces ayant amené pile à l'étape 2 (s'il en existe),*
- ⋆ *à l'étape 4, on lance les pièces ayant amené pile à l'étape 3 (s'il en existe),*

et ainsi de suite.
À chaque étape, les lancers des pièces sont supposés indépendants. On considère les évènements :

A_n *: « obtenir 0 pile à l'étape* n *»* $\quad B_n$ *: « obtenir 1 pile à l'étape* n *»*
C_n *: « obtenir 2 piles à l'étape* n *»* $\quad D_n$ *: « obtenir 3 piles à l'étape* n *».*

On pose les deux conventions suivantes :

- ⋆ *L'évènement* D_0 *est l'évènement certain et les trois évènements* A_0, B_0, C_0 *sont impossibles.*
- ⋆ *si à une certaine étape* n_0 *aucun côté pile n'apparaît, on considère que pour tous les entiers* n *supérieurs ou égaux à* n_0 *l'événement* A_n *est réalisé.*

1. *Calculer les quatre probabilités* $P(A_1), P(B_1), P(C_1)$ *et* $P(D_1)$.
2. *Pour tout entier naturel* n, *calculer très soigneusement les 16 probabilités conditionnelles*

$$\begin{array}{llll} P_{A_n}(A_{n+1}) & P_{B_n}(A_{n+1}) & P_{C_n}(A_{n+1}) & P_{D_n}(A_{n+1}) \\ P_{A_n}(B_{n+1}) & P_{B_n}(B_{n+1}) & P_{C_n}(B_{n+1}) & P_{D_n}(B_{n+1}) \\ P_{A_n}(C_{n+1}) & P_{B_n}(C_{n+1}) & P_{C_n}(C_{n+1}) & P_{D_n}(D_{n+1}) \\ P_{A_n}(D_{n+1}) & P_{B_n}(D_{n+1}) & P_{C_n}(D_{n+1}) & P_{D_n}(D_{n+1}) \end{array}$$

3. *A l'aide d'une formule de probabilité totale, exprimer* $P(A_{n+1})$ *(resp.* $P(B_{n+1})$, *resp.* $P(C_{n+1})$, *resp.* $P(D_{n+1})$*) en fonction des probabilités* $P(A_n), P(B_n), P(C_n), P(D_n)$.
4. *Pour tout entier naturel* n, *on considère la matrice colonne* $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \\ P(D_n) \end{pmatrix}$.
   (a) *Déterminer une matrice* M *telle que* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = MU_n$ *puis montrer que,* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = M^n U_0$.
   (b) *Donner* U_0 *puis, à l'aide de la question 4 de la partie I, calculer les 4 coefficients de* U_n.

Exercice 16 (Suites, probabilités et matrices). *On considère les matrices* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *et* $M = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

1. ***Calcul de*** M^n *:*
   Montrer que, pour tout entier naturel n *:* $M^n = \dfrac{1}{2^n}I + \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)J$.
2. ***Une application probabiliste*** *:*
   Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC *de la façon suivante : si, à l'instant* n, *il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant* $(n+1)$, *soit il y reste, avec une probabilité de* $\dfrac{2}{3}$, *soit il se place sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité.*
   On note :

- ⋆ A_n *l'événement : « le mobile se trouve en* A *à l'instant* n *».*
- ⋆ B_n *l'événement : « le mobile se trouve en* B *à l'instant* n *».*
- ⋆ C_n *l'événement : « le mobile se trouve en* C *à l'instant* n *».*

On pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ *et* $c_n = P(C_n)$.

(a) *Exprimer, pour tout entier naturel* n, a_{n+1}, b_{n+1} *et* c_{n+1} *en fonction de* a_n, b_n *et* c_n.

(b) *Exprimer* $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$ *en fonction de* $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ *puis montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$

(c) *En déduire l'expression de* a_n, b_n *et* c_n *et calculer les limites correspondantes.*

Exercice 17 (Joyeux anniversaire...)**.** *On considère un groupe de* p *personnes, avec* $1 \leqslant p \leqslant 365$. *On suppose que toutes les années contiennent 365 jours et que toutes les dates d'anniversaire sont équiprobables.*

1. *Déterminer la probabilité pour qu'une personne au moins soit née le même jour que vous.*
2. *Déterminer la probabilité pour qu'au moins deux personnes du groupe soient nées le même jour.*