

TD DU CHAPITRE 8 : INDICATIONS-CORRECTIONS

Exercice 1 (TS, centres étrangers 2008).

Exercice 2 (TS, Nouvelle-Calédonie mars 2008, extraits).

On note : — E_1 : « le poisson provient de l'élevage 1 » — E_2 : « le poisson provient de l'élevage 2 » — R : « le poisson est rouge » — G : « le poisson est gris » — M : « le poisson est mort »

1. (a) (E_1, E_2) est un SCE et, d'après la formule des probabilités totales, on a $P(M) = P(M \cap E_1) + P(M \cap E_2) = P(E_1)P_{E_1}(M) + P(E_2)P_{E_2}(M) = 0,6 \times 0,1 + 0,4 \times 0,05 = 0,06 + 0,02 = 0,08$. D'où $P(\overline{M}) = 1 - 0,08 = 0,92$.
 - (b) Même méthode. On trouve $P(R) = 0,6 \times 0,75 + 0,4 \times 0,65 = 0,45 + 0,26 = 0,71$.
On en déduit notamment $P(G) = 1 - P(M) - P(R) = 0,21$.
 - (c) On a $P_G(E_1) = \frac{P(G \cap E_1)}{P(G)} = \frac{0,6 \times 0,15}{0,21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$.
2. On a $E(X) = 1 \times P(X = 1) + 0,25 \times P(X = 0,25) - 0,1 \times P(X = -0,1) = 1 \times 0,71 + 0,25 \times 0,21 - 0,1 \times 0,08 = 0,71 + 0,0525 - 0,008 = 0,7545 \approx 0,75$ euros.

Exercice 3.

Partie A

1. On a, d'après l'énoncé, $G = (B \cap \overline{\{6\}}) \cup (\overline{B} \cap \{6\})$, l'union étant disjointe et les événements de chaque intersection indépendants.

De plus, par équiprobabilité, $P(B) = \frac{1}{10}$ et $P(\{6\}) = \frac{1}{6}$.

On a donc, $P(G) = \frac{1}{10} \times \frac{5}{6} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{60} + \frac{9}{60} = \frac{7}{30}$.

2. On a : $P_{\overline{G}}(B) = \frac{P(\overline{G} \cap B)}{P(\overline{G})}$.

Or, $P(\overline{G} \cap B) = P(B) \times P_{\overline{G}}(B) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{6}$ et $P(\overline{G}) = 1 - \frac{7}{30} = \frac{23}{30}$.

D'où $P_{\overline{G}}(B) = \frac{\frac{1}{60}}{\frac{23}{30}} = \frac{1}{60} \times \frac{30}{23} = \frac{1}{46}$.

3. On peut effectivement s'aider d'un arbre à 4 niveaux de ramifications (un niveau par partie) avec, à chaque fois, une branche G et une branche \overline{G} , respectivement pondérées par $\frac{7}{30}$ et $\frac{23}{30}$. Ou bien, on peut se souvenir de l'année dernière et reconnaître une loi binomiale de paramètre $n = 4$ et $p = \frac{7}{30}$ (répétition d'une même expérience aléatoire à deux issues de manière indépendante). Si X est la variable aléatoire comptant le nombre de victoire, la probabilité cherchée vaut donc $P(X = 2) = \binom{4}{2} \left(\frac{7}{30}\right)^2 \left(\frac{23}{30}\right)^2$ avec $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$.

On trouve environ 0,19 à l'aide d'une calculatrice.

4. L'événement contraire de « gagner au moins une partie sur n parties tentées » est « ne gagner aucune partie sur n parties tentées ». Par indépendance, la probabilité de cet événement contraire vaut $\left(\frac{23}{30}\right)^n$.

On cherche donc à résoudre $1 - \left(\frac{23}{30}\right)^n \geq 0,99 \iff \left(\frac{23}{30}\right)^n \leq 0,01 \iff n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{23}{30}\right)}$. A l'aide d'une calculatrice, on trouve environ 17,3 pour le membre de droite, donc le nombre minimal de parties à faire est 18.

Partie B

1. (a) On a $X(\Omega) = \{-1; 4\}$ d'après l'énoncé (gain - mise). On a aussi $P(X = 4) = \frac{7}{30}$ et $P(X = -1) = \frac{23}{30}$ donc $E(X) = 4 \times \frac{7}{30} + (-1) \times \frac{23}{30} = \frac{5}{30} \approx 0,17$ euros.

(b) Le jeu est donc défavorable à l'organisateur.

$$2. \text{ On aura donc } P(B) = \frac{1}{n+1} \text{ et } P(\overline{B}) = \frac{n}{n+1} \text{ donc } P(G) = \frac{1}{n+1} \times \frac{5}{6} + \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{6} = \frac{5+n}{6(n+1)} \text{ et donc}$$

$$P(\overline{G}) = 1 - \frac{5+n}{6(n+1)} = \frac{5n+1}{6(n+1)}.$$

$$\text{Enfin, } E(X) = 4 \times \frac{5+n}{6(n+1)} + (-1) \times \frac{5n+1}{6(n+1)} = \frac{19-n}{6(n+1)}.$$

Il faut donc mettre au minimum 19 boules noires dans l'urne pour que le jeu soit favorable à l'organisateur.

Exercice 4 (TS, Asie, juin 2012, extraits).

Exercice 5 (Loi de Hardy-Weinberg).

1. Probabilité du génotype de l'enfant en fonction de celui des parents.

On tient compte de l'hypothèse que chacun des couples se forment indépendamment des génotypes.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note, par exemple en premier le génotype de la mère et en second celui du père à la génération n si l'on tient compte de l'ordre. On note entre accolades lorsqu'on ne prend pas l'ordre en compte (puisque cela n'influe pas sur les probabilités conditionnelles).

Enfin, on note avec un indice $n+1$ le génotype de l'enfant. On a les couples suivants et les probabilités suivantes :

★ Couple 1 : $\{AA_n; AA_n\} = (AA_n; AA_n)$ avec $P(\{AA_n; AA_n\}) = p_n^2$.

On a alors $P_{\{AA_n; AA_n\}}(AA_{n+1}) = 1$

★ Couple 5 : $\{aa_n; aa_n\} = (aa_n; aa_n)$ avec $P(\{aa_n; aa_n\}) = r_n^2$.

On a alors $P_{\{aa_n; aa_n\}}(aa_{n+1}) = 1$

★ Couple 3 : $\{AA_n; aa_n\} = (AA_n; aa_n) \cup (aa_n; AA_n)$ avec $P(\{AA_n; aa_n\}) = p_n r_n + r_n p_n = 2p_n r_n$.

On a alors $P_{\{AA_n; aa_n\}}(Aa_{n+1}) = 1$ (chaque parent donne un de ces gènes donc il n'y a qu'une possibilité).

★ Couple 4 : $\{AA_n; Aa_n\} = (AA_n; Aa_n) \cup (Aa_n; AA_n)$ avec $P(\{AA_n; Aa_n\}) = p_n q_n + q_n p_n = 2p_n q_n$.

On a alors $P_{\{AA_n; Aa_n\}}(AA_{n+1}) = \frac{1}{2}$ et $P_{\{AA_n; Aa_n\}}(Aa_{n+1}) = \frac{1}{2}$ (le parent AA donne A et l'autre a une chance sur deux de donner soit A, soit a (hypothèse d'équiprobabilité)).

★ Couple 5 : $\{aa_n; Aa_n\} = (aa_n; Aa_n) \cup (Aa_n; aa_n)$ avec $P(\{aa_n; Aa_n\}) = r_n q_n + q_n r_n = 2q_n r_n$.

On a alors $P_{\{aa_n; Aa_n\}}(aa_{n+1}) = \frac{1}{2}$ et $P_{\{aa_n; Aa_n\}}(Aa_{n+1}) = \frac{1}{2}$ (comme pour le cas précédent).

★ Couple 6 : $\{Aa_n; Aa_n\} = (Aa_n; Aa_n)$ avec $P(\{Aa_n; Aa_n\}) = q_n^2$.

On a alors $P_{\{Aa_n; Aa_n\}}(aa_{n+1}) = \frac{1}{4}$ et $P_{\{Aa_n; Aa_n\}}(Aa_{n+1}) = \frac{1}{2}$ et $P_{\{Aa_n; Aa_n\}}(AA_{n+1}) = \frac{1}{4}$ (le génotype Aa_{n+1} est deux fois plus probable que les deux autres car il y a deux possibilité : Aa ou bien aA. C'est le même principe que lorsqu'on jette deux pièces équilibrées...).

2. Pas le courage ! Mais la structure est :

★ Première ramification pour la mère (probabilité p_n , q_n et r_n).

★ Deuxième ramification pour le père (même probabilités car indépendance)

★ Troisième ramification pour l'enfant (les probabilités sont celles calculées à la question précédente).

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des couples possibles est un SCE et la formule des probabilités totales donne, en enlevant les termes de probabilités nulles pour ne pas surcharger, on a

$$p_{n+1} = P(AA_{n+1} \cap \{AA_n; AA_n\}) + P(AA_{n+1} \cap \{AA_n; Aa_n\}) + P(AA_{n+1} \cap \{Aa_n; Aa_n\})$$

$$= P(\{AA_n; AA_n\}) P_{\{AA_n; AA_n\}}(AA_{n+1}) + P(\{AA_n; Aa_n\}) P_{\{AA_n; Aa_n\}}(AA_{n+1}) + P(\{Aa_n; Aa_n\}) P_{\{Aa_n; Aa_n\}}(AA_{n+1})$$

$$= p_n^2 \times 1 + 2p_n q_n \times \frac{1}{2} + q_n^2 \times \frac{1}{4} = p_n^2 + p_n q_n + \frac{q_n^2}{4} = \left(p_n + \frac{q_n}{2}\right)^2$$

et $r_{n+1} = \left(r_n + \frac{q_n}{2}\right)^2$ exactement par le même raisonnement (la situation est parfaitement symétrique entre a et A au niveau des génotypes. Faites le si vous n'êtes pas convaincus ou si vous voulez adapter la démonstration.

4. $p_n + q_n + r_n = 1$, puisque ces trois génotypes forment un SCE pour une personne de la génération n .

5. Soit $\alpha = p_0 - q_0$ et (u_n) définie par $u_n = p_n - r_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que (u_n) est constante égale à α .

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= p_{n+1} - r_{n+1} = \left(p_n + \frac{q_n}{2}\right)^2 - \left(r_n + \frac{q_n}{2}\right)^2 = \left(p_n + \frac{q_n}{2} + r_n + \frac{q_n}{2}\right) \left(p_n + \frac{q_n}{2} - \left(r_n + \frac{q_n}{2}\right)\right) \\ &= (p_n + q_n + r_n)(p_n - r_n) = p_n - r_n = u_n, \text{ ce qui montre que la suite est constante.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \text{ Soit } n \in \mathbb{N}, p_{n+1} &= \left(p_n + \frac{q_n}{2}\right)^2 = \left(p_n + \frac{1 - p_n - r_n}{2}\right)^2 = \left(\frac{1 + p_n - r_n}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1 + u_n}{2}\right)^2 = \left(\frac{1 + \alpha}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

$$\text{De la même manière, on trouve que } r_{n+1} = \left(\frac{1 - \alpha}{2}\right)^2.$$

7. On a démontré que les suites (p_{n+1}) et (r_{n+1}) sont constantes, ce qui revient à dire que les suites (p_n) et (r_n) sont constantes à partir du rang 1. C'est exactement le principe de Hardy-Weinberg (puisque'il est évident qu'alors (q_n) sera également constante).

Exercice 6 (Pièce truquée).

Dans un lot de 100 pièces de monnaie toutes de même apparence, ont été mélangées 60 pièces équilibrées et 40 pièces truquées. La probabilité d'apparition de « Face » lors d'un jet d'une pièce truquée est $\frac{3}{4}$.

1. (a) La formule des probabilités totales avec le SCE, en tenant compte de l'hypothèse d'équiprobabilité dans le choix d'une pièce (même si l'énoncé est un équivoque...) $(T; \bar{T})$ donne

$$P(F) = P(F \cap T) + P(F \cap \bar{T}) = P(T)P_T(F) + P(\bar{T})P_{\bar{T}}(F) = \frac{40}{100} \times \frac{3}{4} + \frac{60}{100} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

$$(b) \text{ On a } P_F(T) = \frac{P(T \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

2. On considère un jeu dont la mise est 10 euros, qui consiste à choisir une des 100 pièces et à la lancer. Si le résultat est face, on ne gagne rien, sinon on gagne a euros. Soit G la variable aléatoire donnant le gain algébrique du jeu.

$$(a) G(\Omega) = \{-10; a - 10\}, P(G = a - 10) = P(F) = 0,6 \text{ et } P(G = -10) = 1 - 0,6 = 0,4.$$

$$\begin{aligned} \text{On a donc } E(G) &= 0,6(a - 10) + 0,4(-10) = 0,6a - 10. \text{ Le jeu est donc équitable à condition que} \\ 0,6a - 10 &= 0 \iff a = \frac{10}{0,6} = \frac{50}{3} \approx 16,7 \text{ euros} \end{aligned}$$

3. \star si au cours des quatre lancers on obtient quatre fois « Face », on décide d'éliminer la pièce, \star dans le cas contraire, on décide de conserver la pièce.

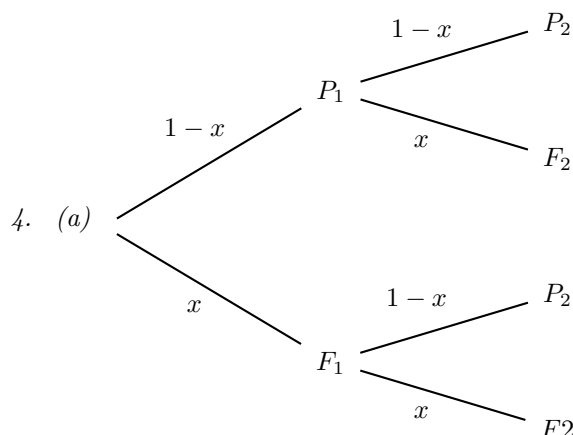
On note E l'événement « la pièce est éliminée ».

$$(a) P_{\bar{T}}(E) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \text{ par indépendance des lancers.}$$

$$(b) P_T(\bar{E}) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 = 1 - \frac{81}{256} = \frac{175}{256}.$$

$$(c) \text{ Comme ces deux événements sont incompatibles, la probabilités cherchées vaut : } P(\bar{T} \cap E) + P(T \cap \bar{E}) = \frac{3}{5} \frac{1}{16} + \frac{2}{5} \frac{175}{256} = \frac{199}{640} \approx 0,31.$$

$$(d) P_T(E) = \frac{81}{256}, \text{ d'après ce qui précède. Puis, d'après la formule des probabilités totales, } P(E) = \frac{3}{5} \frac{1}{16} + \frac{2}{5} \frac{81}{256} = \frac{21}{128} \approx 0,16.$$



(b) Ces trois probabilités, correspondants au événements A_1 , B_1 et R_1 valent respectivement :

$$P(A_1) = (1-x)x, P(B_1) = x(1-x) \text{ et } P(R_1) = (1-x)^2 + x^2.$$

(c) On a $A = A_1 \cup (R_1 \cap A)$. En effet, soit on réussit A directement, soit on a deux résultats identiques et on recommence, ce qui nous place dans la configuration initiale. On en déduit, en remplaçant par les probabilités précédemment calculées :

$$P(A) = x(1-x) + (x^2 + (1-x)^2)P(A) \iff (1-x^2 - (1-x)^2) P(A) = x(1-x)$$

$$\iff (2x - 2x^2) P(A) = x(1-x) \iff P(A) = \frac{x(1-x)}{2x(1-x)} = \frac{1}{2}.$$

Voici un complément, qui concerne le chapitre sur les variables aléatoires discrètes. Je le corrigerai peut être dans un corrigé du corrigé...

(d) Soit N la variable aléatoire égale au nombre de séries de deux lancers nécessaire avant d'obtenir un résultat A ou B

i. Etudier la fonction $p :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + (1-x)^2$. Quel est l'axe de symétrie de sa courbe ?

ii. Démontrer que pour tout entier $k \geq 1, P(N \geq k) = (p(x))^k$.

iii. Déduire $P(N = k)$ de : $(N \geq k) = (N \geq k + 1) \cup (N = k)$.

iv. Expliquer pourquoi $\mathbb{E}(N) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n P(N \geq k)$.

v. En déduire $\mathbb{E}(N)$ en fonction de x et interpréter ce nombre.

vi. Calculer la limite lorsque x tend vers 0 et vers 1 de $\mathbb{E}(N)$. Interpréter.

Exercice 7.

La société Leazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.

Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

	A	B	C
1	★		
2	★		
3		★	

On définit les événements H, V, D, N par :

- ★ H : « les trois jetons sont alignés horizontalement ».
- ★ V : « les trois jetons sont alignés verticalement ».
- ★ D : « les trois jetons sont alignés en diagonale ».
- ★ N : « les trois jetons ne sont pas alignés ».

1. Les positionnement sont déterminés par l'ensembles (sans ordre) des 3 positions distinctes parmi 9. il y en a donc $\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$

2. (H) est formé de 3 positionnements : ligne 1, 2 ou 3, les positionnements étant équiprobables (on le suppose) donc $P(H) = \frac{3}{84}$

(V) est formé de 3 positionnements : colonne A, B ou C donc $P(V) = \frac{3}{84}$

(D) comporte es deux diagonales descendants et ascendantes. Donc $P(D) = \frac{2}{84}$

3. (H, V, D, N) étant un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} P(N) &= 1 - P(V) - P(H) - P(D) \\ &= 1 - \frac{8}{84} = 1 - \frac{2}{21} \\ &= \frac{19}{21} \simeq 0.9048 \end{aligned}$$

4. La société peut s'attendre à 10 000 relances par jour de ce jeu.

(a) Pour chaque entier naturel i non nul. on note Z_i le gain de la société à la $i^{\text{ème}}$ relance.

Lors de la $i^{\text{ème}}$ relance, la société peut gagner 2 euros (la mise) si N ou en perdre 18 sinon.

Donc $Z_i(\Omega) = \{2, -18\}$. avec $P(Z_i = 2) = P(N) = \frac{19}{21}$ et $P(Z_i = -18) = \frac{2}{21}$, donc

$$\begin{aligned} E(Z_i) &= 2 \frac{19}{21} - 18 \frac{2}{21} \\ &= \frac{38 - 36}{21} = \frac{2}{21} \end{aligned}$$

Conclusion : $E(Z_i) = \frac{2}{21} \simeq 0,1$

(b) le gai total est la somme des gains à chaque relance donc $Z = \sum Z_i$ et $E(Z) = 10000 \cdot \frac{2}{21} \simeq 1000$

Conclusion : $\boxed{\text{En moyenne, la société gagnera à peu près 1000€ par jour}}$, mais elle peut espérer beaucoup plus!

PARTIE III. Contrôle de la qualité du jeu.

On constate que, parfois, la fonction aléatoire est dérégulée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case $(A, 1)$, les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes. On note Δ l'événement « la fonction aléatoire est dérégulée » et on pose $P(\Delta) = x$ avec $x \in]0, 1[$.

1. Sachant Δ , les positions sont déterminées par la seule combinaison des 2 autres positions parmi les 8 restantes.

Il y a donc $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$ positionnements possibles et équiprobables.

(H) est à présent réduit à la ligne 1, V à la colonne A et D à la diagonale descendante.

Conclusion : $P_{\Delta}(H) = P_{\Delta}(V) = P_{\Delta}(D) = \frac{1}{28}$

2. On a donc $P_{\Delta}(N) = 1 - \frac{3}{28} = \frac{25}{28}$

Sachant $\bar{\Delta}$, l'expérience se fait dans les conditions de la partie I et les probabilités sont donc celle de la partie I : $P_{\bar{\Delta}}(N) = \frac{19}{21}$

$(\Delta, \bar{\Delta})$ est un système complet d'événement donc

$$\begin{aligned} P(N) &= P_{\bar{\Delta}}(N) \cdot P(\bar{\Delta}) + P_{\Delta}(N) \cdot P(\Delta) \\ &= x \frac{25}{28} + (1-x) \frac{19}{21} \\ &= x \frac{25}{4 \cdot 7} + (1-x) \frac{19}{3 \cdot 7} \\ &= \frac{25 \cdot 3 - 19 \cdot 4}{3 \cdot 4 \cdot 7} x + \frac{19}{21} \\ &= -\frac{x}{84} + \frac{19}{21} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{la probabilité les jetons ne soient pas alignés est égal à } P(N) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}}$

3. Soit G la variable aléatoire égale au gain réalisé par la société de jeu lors d'une partie jouée.

On a donc $P(G = 2) = P(N)$ et $P(G = -18) = P(\bar{N}) = 1 - P(N)$

Donc

$$\begin{aligned} E(G) &= 2 \left(-\frac{x}{84} + \frac{19}{21} \right) - 18 \left(1 + \frac{x}{84} - \frac{19}{21} \right) \\ &= -\frac{20}{84}x + \frac{2}{21} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E(G) > 0 &\iff -\frac{20}{84}x + \frac{2}{21} > 0 \\ &\iff x < \frac{2}{21} \cdot \frac{84}{20} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Conclusion : le gain moyen reste positif tant que $x < \frac{2}{5}$

4. On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés.

la fonction aléatoire a été dérégulée si Δ

On cherche donc $P_{\bar{N}}(\Delta)$ par la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} P_{\bar{N}}(\Delta) &= \frac{P(\Delta \cap \bar{N})}{P(\bar{N})} \\ &= \frac{P(\Delta)P_{\Delta}(\bar{N})}{P(\bar{N})} \\ &= \frac{x \cdot \frac{3}{28}}{1 - \left(-\frac{x}{84} + \frac{19}{21} \right)} \\ &= \frac{x \cdot \frac{3}{28}}{\frac{2}{21} + \frac{x}{84}} = \frac{9x}{x+8} \end{aligned}$$

Conclusion : Si les jetons sont alignés, la fonction aléatoire a été dérégulée avec une probabilité $\frac{9x}{x+8}$

Exercice 8.

Exercice 9 (D'après ECRICOME 2001).

Dans cet exercice on étudie l'évolution au cours du temps d'un titre dans une bourse de valeurs.

1.1. Le but de la première partie est de calculer les puissances successives de la matrice :

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

où a représente un nombre réel.

(a) On calcule de chaque côté :

$$\begin{aligned} M(a)M(b) &= \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2b & b & b \\ b & 1-2b & b \\ b & b & 1-2b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-2b-2a+6ab & b-3ab+a & b-3ab+a \\ b-3ab+a & 1-2b-2a+6ab & b-3ab+a \\ b-3ab+a & b-3ab+a & 1-2b-2a+6ab \end{pmatrix} \\ &= M(a+b-3ab) \end{aligned}$$

(b) Pour l'inversibilité, on pense à $AB = I \dots$

Si on a $M(a+b-3ab) = I$, on aura l'inversibilité de $M(a)$. Or ceci est vrai pour $a+b-3ab=0$
 On cherche pour quelles valeurs de a on a peut trouver b tel que $a+b-3ab=0 \iff b(1-3a) = -a$
 Donc si $a \neq 1/3$ alors avec $b = \frac{a}{3a-1}$ on a $M(a)M(b) = M(0) = I$ et $M(a)$ est alors inversible
 d'inverse $M(a)^{-1} = M\left(\frac{a}{3a-1}\right)$

Reste à examiner le cas $a = \frac{1}{3}$:

$$M\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \text{ et comme les colonnes sont liées, la matrice n'est pas inversible.}$$

Conclusion : $M(a)$ est inversible uniquement pour $a \neq 1/3$

(c) La matrice $M(a)$ étant symétrique, elle est diagonalisable.

(d) Soit $a \neq 0$

On n'oublie pas qu'un carré est un produit : $M(a)^2 = M(a)M(a) = M(2a-3a^2)$

Donc $M(a)^2 = M(a) \iff M(2a-3a^2) = M(a) \iff 2a-3a^2 = a$ par identification des coefficients
 On résout : $2a-3a^2 = a \iff a-3a^2 = 0 \iff a(1-3a) = 0 \iff a = 1/3$ puisque l'on cherche $a \neq 0$

Donc $a_0 = 1/3$ est l'unique réel vérifiant $M(a_0)^2 = M(a_0)$

(e) On considère les matrices :

$$P = M(a_0) \quad \text{et} \quad Q = I - P$$

où I désigne la matrice carrée unité d'ordre 3.

$$\text{On a donc } P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i. Pour montrer l'existence de α , on peut le chercher au brouillon et le donner :

Au brouillon : $M(a) = P + \alpha Q$

$$\iff \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 1-2a = \frac{1+2\alpha}{3} \\ a = \frac{1-\alpha}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1-3a \\ 0 = 0 \end{cases}$$

rédaction : soit $\alpha = 1-3a$ on a

$$P + \alpha Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (1-3a) \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = M(a)$$

Ou bien on rédige directement la recherche par équivalence. (seule la réciproque est en fait utile)

ii. $P^2 = M(a_0)^2 = M(a_0) = P$

$$QP = (I - P)P = P - P^2 = P - P = 0$$

$$P(I - P) = 0,$$

$$Q^2 = (I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P = Q$$

iii. On peut procéder par récurrence **ou utiliser la formule du binôme** (plus technique !)

$$\text{Comme } PQ = QP \text{ alors } [M(a)]^n = [P + \alpha Q]^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^k \alpha^{n-k} Q^{n-k}$$

Or $P^k = P$ si $k \geq 1$ et $Q^{n-k} = Q$ si $n-k \geq 1 \iff k \leq n-1$ et on découpe donc la somme :

$$\begin{aligned} [M(a)]^n &= [P + \alpha Q]^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^k \alpha^{n-k} Q^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} P Q + \binom{n}{0} P^0 \alpha^n Q + \binom{n}{n} P \alpha^{n-k} Q^0 \\ &= 0 + \alpha^n Q + P \\ &= \alpha^n Q + P \end{aligned}$$

N.B. le découpage de la somme n'est valable que pour $n \geq 2$

Reste à voir pour $n = 0$ et $n = 1$: $M(a)^0 = I = Q + P$ (ce qui est la formule précédente pour $n = 0$)

Et pour $n = 1$ on a $M(a) = P + \alpha Q$ (ce qui est encore la formule précédente pour $n = 1$)

Donc partout entier n : $M(a)^n = \alpha^n Q + P$ est bien comme combinaison linéaire de Q et P

Ou par récurrence

★ Pour $n = 1$, $[M(a)]^1 = M(a) = P + \alpha Q$ donc $x_1 = 1$ et $y_1 = \alpha$ conviennent

(cela était déjà vrai pour $n = 0$ mais l'énoncé ne le demandait qu'à partir de 0)

★ Soit $n \geq 1$ tel qu'il existe x_n et y_n réels tels que $[M(a)]^n = x_n P + y_n Q$ avec x_n et y_n réels alors $[M(a)]^{n+1} = (x_n P + y_n Q)(P + \alpha Q) = x_n P^2 + y_n QP + \alpha x_n PQ + \alpha y_n Q^2 = x_n P + \alpha y_n Q$

Donc avec $x_{n+1} = x_n$ et $y_{n+1} = \alpha y_n$ qui sont bien des réels, on a $[M(a)]^{n+1} = x_{n+1} P + y_{n+1} Q$

★ Donc pour tout entier n on a $[M(a)]^n = x_n P + y_n Q$ combinaison linéaire de P et de Q avec $x_{n+1} = x_n$ et $y_{n+1} = \alpha y_n$

iv. Si on a utilisé le binôme, on n'a plus rien à faire : $M(a)^n = \alpha^n Q + P$

Pour la récurrence : la suite x est constante donc $x_n = x_1 = 1$ et y est géométrique de raison α donc $y_n = \alpha^{n-1} y_1 = \alpha^n$

Donc pour tout entier $n \geq 1$, $[M(a)]^n = P + \alpha^n Q$

1.2. Évolution d'un titre boursier au cours du temps.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $a \in]0, \frac{2}{3}[$.

1. On définit des suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par leur premier terme p_1, q_1, r_1 , et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} p_{n+1} = (1 - 2a)p_n + aq_n + ar_n \\ q_{n+1} = ap_n + (1 - 2a)q_n + ar_n \\ r_{n+1} = ap_n + aq_n + (1 - 2a)r_n \end{cases}$$

(a) Comme $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = M(a) \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$ on a alors pour tout entier n ,

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = [M(a)]^{n-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = [\alpha^{n-1} Q + P] \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix}$$

(b) On a $\alpha = 1 - 3a$ et comme $0 < a < 2/3$ alors $0 > -3a > -2$ et $1 > 1 - 3a > -1 < \alpha < 1$ donc $\alpha^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} (p_1 + q_1 + r_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. (a) (M_n, S_n, B_n) formant un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned} p(M_{n+1}) &= p(M_{n+1}/M_n)p(M_n) + p(M_{n+1}/S_n)p(S_n) + p(M_{n+1}/B_n)p(B_n) \\ &= \frac{2}{3}p(M_n) + \frac{1}{6}p(S_n) + \frac{1}{6}p(B_n) \end{aligned}$$

et de la même façon

$$\begin{aligned} p(S_{n+1}) &= \frac{1}{6}p(M_n) + \frac{2}{3}p(S_n) + \frac{1}{6}p(B_n) \\ p(B_{n+1}) &= \frac{1}{6}p(M_n) + \frac{1}{6}p(S_n) + \frac{2}{3}p(B_n) \end{aligned}$$

- (b) On retrouve les relations de récurrence précédentes avec $p_n = p(M_n)$, $q_n = p(S_n)$ et $r_n = p(B_n)$ et $a = 1/6 \in]0, 2/3[$ et $\alpha = 1 - 3/6 = 1/2 < 2/3$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p(M_n) \\ p(S_n) \\ p(B_n) \end{pmatrix} &= \left(\frac{1}{2^{n-1}} Q + P \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n-1}} Q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 - 1/2^{n-1} \\ 1 + 2/2^{n-1} \\ 1 - 1/2^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{donc } p(M_n) = p(B_n) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \text{ et } p(S_n) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

(c) Et quand n tend vers $+\infty$ ces trois probabilités tendent vers $1/3$ car $a < 2/3$ (car $p_1 + q_1 + r_1 = 1$ SCE)

Exercice 10 (Urnes, boules et suites).

Exercice 11 (Urnes, boules et indépendance).

1. On suppose qu'il n'y a pas remise. On peut donc assimiler ce tirage à un tirage simultané.

$$\text{Le nombre total de tirages possibles est donc } \binom{13}{4} = \frac{13!}{4!9!} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10}{4 \times 3 \times 2} = 13 \times 11 \times 5 = 715$$

On a alors :

$$P(E \cap F) = P(\{BBRR\}) = \frac{\binom{3}{2} \binom{4}{2}}{\binom{13}{4}} = \frac{18}{715}$$

$$\text{De plus, par un raisonnement similaire } P(F) = \frac{\binom{9}{2} \binom{4}{2}}{\binom{13}{4}} = \frac{216}{715} \text{ (les deux boules restantes sont à tirer}$$

parmi les 9 boules non rouges).

$$\text{Et } P(E) = \frac{\binom{3}{2} \binom{10}{2}}{\binom{13}{4}} = \frac{135}{715} = \frac{27}{143}.$$

La formule des probabilités conditionnelles et les calculs précédents donnent donc :

$$P_F(E) = \frac{\frac{18}{715} \cdot 216}{\frac{18}{715}} = \frac{1}{12}.$$

$$\text{Et } P_E(F) = \frac{\frac{216}{715}}{\frac{135}{715}} = \frac{2}{15}$$

Enfin $P(E)P(F) = \frac{27}{143} \frac{216}{715} \neq \frac{18}{715} = P(E \cap F)$ donc les événements E et F ne sont pas indépendants.

2. Pour calculer $P(F)$, cela revient à calculer $P(X = 2)$ où X est la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées. On a, par indépendance, X qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{4}{13}$.

$$\text{Donc, } P(F) = \binom{4}{2} \left(\frac{4}{13}\right)^2 \left(\frac{9}{13}\right)^2 = 6 \frac{4^2 \times 9^2}{13^4}.$$

Comme n est assez petit, on peut aussi tout énumérer à la main.

$P(F) = P(RR\bar{R}\bar{R}) + P(R\bar{R}R\bar{R}) + P(R\bar{R}\bar{R}R) + P(\bar{R}R\bar{R}\bar{R}) + P(\bar{R}\bar{R}R\bar{R}) + P(\bar{R}\bar{R}\bar{R}R)$ et on trouve la même chose.

$$\text{De même } P(E) = \binom{4}{2} \left(\frac{3}{13}\right)^2 \left(\frac{10}{13}\right)^2$$

Pour calculer la probabilité de $E \cap F$ une solution est la suivante :

On note A : « les 4 boules tirées sont tirées parmi les 7 boules non noires

$$P(E \cap F) = P(A)P_A(E \cap F).$$

Or : $P(A) = P(X = 4)$ où X suit une loi binomiale de paramètre $n = 4$ et $p = \frac{7}{13}$ donc :

$$P(A) = \left(\frac{7}{13}\right)^4.$$

Enfin, $P_A(E \cap F) = P(Y = 2)$ où Y suit une loi binomiale de paramètre $n = 4$ et $p = \frac{3}{7}$ donc :

$$P_A(E \cap F) = \binom{4}{2} \left(\frac{3}{7}\right)^2 \left(\frac{4}{7}\right)^2$$

$$\text{On obtient } P(E \cap F) = 6 \times \frac{3^2 \times 4^2}{13^4}$$

Exercice 12 (Des urnes et des boules).

C'est le même exercice que le précédent, avec des valeurs plus grandes encore (laisser les résultats sans les simplifier est mon conseil) et plus de cas à considérer. Si vous avez bien compris la correction du précédent, n'hésitez pas à me proposer une solution! Bon courage.

Exercice 13 (Commencer par le plus facile?).

La cible à 20 m sera appelée cible 1, et l'autre cible 2. On note C_{ij} l'évènement atteindre la cible i au tir j avec $i \in \{1, 2\}$ et $j \in \{1, 2, 3\}$. Si l'archer commence par la cible à 20 m, l'évènement gagner le jeu est :

$$(C_{11} \cap C_{22}) \cup (\overline{C_{11}} \cap C_{22} \cap C_{13}).$$

Il s'agit d'une réunion d'évènements incompatibles. De plus, par hypothèse, pour $(i, j) \neq (k, l)$, les évènements C_{ij} et C_{kl} sont indépendants. La probabilité de gagner en commençant par la cible à 20 m est donc :

$$P(C_{11})P(C_{22}) + P(\overline{C_{11}})P(C_{22})P(C_{13}) = pq + (1-p)qp = (2-p)qp.$$

De manière similaire, on montre que la probabilité de gagner en commençant par la cible 2 est :

$$P(C_{21})P(C_{12}) + P(\overline{C_{21}})P(C_{12})P(C_{23}) = qp + (1-q)pq = (2-q)qp.$$

Comme $p > q$, le joueur a intérêt à commencer par la cible à 50 m.

Exercice 14.**Exercice 15 (PROBLEME (Extrait modifié ESSEC 2004)).****I. Calcul matriciel**

1. On trouve $P^2 = I_4$ donc P est inversible et $P^{-1} = P$.
2. On vérifie que $\forall a \in \mathbb{R}, M(a) = PD(a)P^{-1}$. par un calcul direct (deux produits) en remplaçant P^{-1} par P .
3. Pour montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, M(a)M(b) = M(ab)$, il est fortement déconseillé de faire un calcul direct, c'est beaucoup plus simple de se servir de la question précédente.

En effet, soit $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$M(a)M(b) = PD(a)P^{-1}PD(b)P^{-1} = PD(a)D(b)P^{-1} = PD(ab)P^{-1}, \text{ car } D(a)D(b) = D(ab) \text{ par un calcul très simple (on multiplie deux matrices diagonales!).}$$

On en déduit par la récurrence habituelle que $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, [M(a)]^n = M(a^n)$.

En effet, l'initialisation est triviale et l'hérédité repose sur $[M(a)]^{n+1} = [M(a)]^n M(a) = M(a^n) M(a) = M(a^{n+1})$.

4. On voit bien, par identification des coefficients, que $M(c) = I \iff c = 1$.

Soit $a \neq 0$, comme $M(a)M(b) = M(ab)$ et que $M(ab) = I \iff ab = 1$, alors, on a $M(a)M(b) = I \iff b = \frac{1}{a}$.

Donc $M(a)$ est inversible et son inverse est $M\left(\frac{1}{a}\right)$.

Enfin, la matrice $M(0)$ n'est pas inversible car ses trois dernières lignes sont nulles donc il n'y a qu'un pivot et non quatre.

II. Etude d'une expérience aléatoire

1. On est dans le cadre d'une loi binomiale de paramètre $n = 3$ et p par indépendance des trois lancers, mais on peut aussi tout énumérer à la main car n est petit, ce que je vais faire ici, car nous n'avons pas revu les lois binomiales...

$$P(A_1) = P(FFF) = (1-p)^3.$$

$$P(B_1) = P(FFP) + P(FPF) + P(PFF) = 3p(1-p)^2.$$

$$P(C_1) = P(FPP) + P(PFP) + P(PPF) = 3p^2(1-p).$$

$$P(D_1) = P(PPP) = p^3.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$

$P_{A_n}(A_{n+1}) = 1, P_{A_n}(B_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1}) = P_{A_n}(D_{n+1}) = 0$, d'après la deuxième convention.

$P_{B_n}(A_{n+1}) = 1 - p, P_{B_n}(B_{n+1}) = p, P_{B_n}(C_{n+1}) = P_{B_n}(D_{n+1}) = 0$, puisqu'on ne relance qu'une pièce, donc les résultats possibles sont 0 ou 1 pile avec les probabilités de l'énoncé.

$P_{C_n}(A_{n+1}) = P(FF) = (1-p)^2, P_{C_n}(B_{n+1}) = P(FP) + P(PF) = 2p(1-p), P_{C_n}(C_{n+1}) = p^2, P_{C_n}(D_{n+1}) = 0$, puisqu'on relance deux pièces, donc les résultats possibles sont 0, 1 ou 2 pile et on raisonne comme dans la question précédente (ou bien par loi binomiale avec $n = 2$ cette fois).

Enfin $P_{D_n}(A_{n+1}) = P(A_1) = (1-p)^3, P_{D_n}(B_{n+1}) = 3p(1-p)^2, P_{D_n}(C_{n+1}) = 3p^2(1-p)$ et $P_{D_n}(D_{n+1}) = p^3$

3. Je ne le fais que pour le premier, le reste est encore plus simple (moins de termes).

(A_n, B_n, C_n, D_n) est un SCE, donc la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) + P(D_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) + P(D_n)P_{D_n}(A_{n+1}) \\ &= P(A_n) + (1-p)P(B_n) + (1-p)^2P(C_n) + (1-p)^3P(D_n) \end{aligned}$$

4. (a) Il suffit de choisir $M = M(p)$ et cela marche tout seul. On calcule $M(p)U_n$ et on tombe sur les quatre expressions de droite obtenue à l'aide des probabilités totales, donc on reconnaît U_{n+1}

La récurrence classique donne donc $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = M^n U_0$.

(b) $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par convention. Il reste donc à faire le calcul directement en remplaçant $M(p)^n$ par $M(p^n)$ pour trouver une forme explicite de la matrice colonne U_n .

Exercice 16 (Suites, probabilités et matrices).

On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. et $M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

1. Calcul de M^n :

Montrons que, pour tout entier naturel n : $M^n = \frac{1}{2^n}I + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)J$.

On va montrer cette égalité par récurrence sur n .

$\frac{1}{2^0}I + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^0}\right)J = I + 0J = I$ et $M^0 = I$ donc l'égalité est vraie pour $n = 0$.

On peut vérifier facilement par le calcul qu'elle est vraie au rang 1, c'est à dire que $M = \frac{1}{2}I + \frac{1}{6}J$ car on en a besoin pour l'hérédité.

Enfin, pour $n \in \mathbb{N}$, si on suppose l'égalité vraie, on a (en se servant de $IJ = JI = J$) :

$$M^{n+1} = MM^n = \left(\frac{1}{2}I + \frac{1}{6}J\right) \left(\frac{1}{2^n}I + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)J\right) = \frac{1}{2^{n+1}}I + \left(\frac{1}{2^n} \frac{1}{6} + \frac{11}{2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right)J + \frac{11}{6 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)J^2.$$

enfin, on remarque que $J^2 = 3J$ et on remplace et on simplifie le coefficient de J , ce qui vous conduira, je n'en doute pas, au bon résultat... (bon courage pour ceux qui ont du mal sur les puissances, mais franchement, le plus dur est fait).

2. C'est la même chose que l'exercice précédent (et tant d'autres...)

Exercice 17 (Joyeux anniversaire...).

On considère un groupe de p personnes, avec $1 \leq p \leq 365$. On suppose que toutes les années contiennent 365 jours et que toutes les dates d'anniversaire sont équiprobables.

1. Soit A cet événement. On raisonne sur l'événement contraire qui est : « personne n'est né le même jour que vous ».

Par indépendance, cette probabilité vaut $\left(\frac{364}{365}\right)^p$ donc la probabilité cherchée vaut :

$$P(A) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^p.$$

2. Soit B cet événement. On raisonne sur l'événement contraire qui est : « toutes les personnes sont nées des jours distincts ».

$P(\overline{B}) = 1 \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \cdots \times \frac{365-p+1}{365}$ (essayer de trouver le raisonnement via la formule, sachant qu'on raisonne de manière successive...).

D'où $P(B) = 1 - \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \cdots \times \frac{365-p+1}{365}$.

Remarque : ce calcul montre qu'à partir de 23 personnes, cette probabilité est supérieure à 0,5, ce qui choque un peu l'intuition. A partir d'un groupe de 57 personnes, la probabilité est supérieure à 99 %. L'année dernière, j'avais fait un bide avec cet exercice, à cause des sœurs Brazon...