Exercice 1 (Formes indéterminées diverses).

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x^3-x^2-x+1}$ *2.* $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x-1}{x^3-x^2-x+1}$ *3.* $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x-1}{x^3-x^2-x+1}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x}$ *5.* $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+3)-\ln(x-1)$

Exercice 2 (Partie entière et limite).

Par encadrement, étudier les limites suivantes :

1. $\lfloor \dfrac{1}{x} \rfloor$ *en 0* *2.* $x\lfloor \dfrac{1}{x} \rfloor$ *en 0* *3.* $\dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$ *en 0* *4.* $\sqrt{x}\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ *$(0,+\infty)$*

Exercice 3 (Forme indéterminée via les gendarmes).

1. *Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1+x \leqslant e^x$ et $e^x \leqslant 1+xe^x$*
2. *Déduire un encadrement de $\dfrac{e^x-1}{x}$ sur $\mathbb{R}$ et déduire $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x}$.*

Exercice 4.

On pose $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. 1. Déterminer le domaine de définition de f. 2. Montrer que f peut-être prolongée par continuité.

Exercice 5.

Grâce au TVI, montrer que tout polynôme de degré impair a au moins une racine.

Exercice 6.

Soit $f : [0;1] \mapsto [0;1]$ une fonction continue. En appliquant le TVI à une fonction bien choisie, montrer que l'équation $f(x) = x$ possède au moins une solution.

Exercice 7 (Application à l'économie).

Sur un marché supposé parfaitement concurrentiel, la rencontre de l'offre et de la demande détermine le prix d'équlibre du marché. C'est celui qui permettra de réaliser le maximum d'échanges.

Un nouvelle console de jeux est mise en vente sur le marché. On note x son prix unitaire en centaines d'euros. On suppose a priori que $0 \leqslant x \leqslant 6$.

L'offre des fournisseurs (en milliers de consoles) est modélisée par la fonction f définie sur $[0;6]$ par $f(x) = 5+x+0.5x^3$.

La demande des consommateurs (en milliers de consoles) est modélisée par la fonction g définie sur $[0;6]$ par $g(x) = x^2-12x+50$.

Montrer qu'il existe un prix d'équilibre unique, puis qu'il est compris entre 300 et 400 euros.

Exercice 8.

Partie A** : **Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1. *Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.*
2. *Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.*
3. *Dresser le tableau de variations de g*
4. *Justifier que l'équation $g(x) = 0$ possède exactement deux solutions, notée α et β, avec $\alpha < \beta$.*
5. *Vérifier que $-2 < \alpha < -1$ et que $\beta = 0$*
6. *A l'aide des questions précédentes, dresser le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.*

Partie B** : **Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$.

1. *Déterminer la limite de f en $-\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.*
2. *Déterminer la limite de f en $+\infty$.*
3. *Montrer que $f'(x) = e^x g(x)$. En déduire le tableau de variations de f.*

4. *Montrer que* $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2+2\alpha}{4}$, *où* α *est défini dans la **partie B**.*

   Justifier que $0 < f(\alpha) < \dfrac{1}{4}$ *(on pourra étudier les variations de* $x \mapsto x^2+2x$*).*
5. *Donner l'allure de la courbe représentative de* f.

Exercice 9 (D'après TS : Nouvelle Calédonie novembre 2012)**.**

Partie A *Soit la fonction* f *définie et dérivable sur l'intervalle* $[0\ ;\ +\infty[$ *par* $f(x) = 5\ln(x+3) - x$.

1. (a) *Calculer* $f'(x)$ *et étudier son signe sur* $[0\ ;\ +\infty[$.
   (b) *Montrer que, pour tout* $x > 0$, *on a* $f(x) = x\left(5\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$. *En déduire la limite de* f *en* $+\infty$.
   (c) *Dresser le tableau de variation de* f *sur l'intervalle* $[0\ ;\ +\infty[$.
2. (a) *Montrer que l'équation* $f(x) = 0$ *admet une unique solution* α *dans l'intervalle* $[0\ ;\ +\infty[$.
   (b) *En déduire le signe de* f *sur l'intervalle* $[0;+\infty[$.

Partie B *: Soit* (u_n) *la suite définie par* $\begin{cases} u_0 &= 4 \\ u_{n+1} &= 5\ln(u_n+3) \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$

On considère la fonction g *définie sur l'intervalle* $[0\ ;\ +\infty[$ *par* $g(x) = 5\ln(x+3)$.

1. *Etudier le sens de variations de la fonction* g *sur l'intervalle* $[0\ ;\ +\infty[$.
2. *Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel* n, *on a* $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.
3. *Démontrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Exercice 10.

1. *Pour tout entier naturel* $n \neq 0$, *soit* f_n *définie sur* $]0\ ;\ +\infty[$ *par :* $f_n(x) = \ln x + \dfrac{x}{n} - 1$.
   (a) *Déterminer les limites de* f_n *en* 0 *et en* $+\infty$ *puis étudier le sens de variations de* f_n.
   (b) *Montrer que l'équation* $f_n(x) = 0$ *admet une unique solution dans* $]0\ ;\ +\infty[$. *On note* α_n *cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle* $[1\,;e]$.
2. *On note* (Γ) *la courbe représentative de la fonction logarithme népérien dans un repère orthonormal* $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$
   (a) *Soit* n *un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite* Δ_n *passant par le point* A *de coordonnées (0 ; 1) et le point* B_n *de coordonnées* $(n\ ;\ 0)$.
   (b) *Faire un croquis représentant la courbe* (Γ) *et les droites* Δ_1, Δ_2 *et* Δ_3.
   (c) *Montrer que* α_n *est l'abscisse du point d'intersection de* (Γ) *avec* Δ_n.
   (d) *Préciser la valeur de* α_1 *puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite* (α_n).
3. (a) *Exprimer* $\ln(\alpha_n)$ *en fonction de* n *et de* α_n.
   (b) *Exprimer* $f_{n+1}(\alpha_n)$ *en fonction de* n *et de* α_n *et vérifier que :* $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.
   (c) *Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite* (α_n).
   (d) *Montrer que la suite* (α_n) *converge. On note* ℓ *sa limite. Établir que :* $\ln\ell = 1$ *et en déduire la valeur de* ℓ.

Exercice 11.

Soit $f : x \mapsto x + \ln x$

1. *Étudier les variations de* f *et montrer que* f *réalise une bijection entre des intervalles à préciser. On note alors* g *son application réciproque.*
2. *Montrer que l'équation* $f(x) = n$ *admet pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *une unique solutions sur* $\mathbb{R}$, *que l'on note* x_n.
3. *En exprimant le terme général de* x_n *à l'aide de* g, *montrer que la suite* (x_n) *est monotone.*
4. *Montrer par l'absurde que la suite* (x_n) *n'est pas majorée. Déduire sa limite.*

Exercice 12.

Pour $n \in \mathbb{N}$, *on introduit la fonction* f_n *définie sur* $\mathbb{R}_+$ *par* $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1. *Montrer pour tout $n \geqslant 3$ qu'il existe deux uniques réels a_n et b_n tels que $f_n(a_n) = f_n(b_n) = 0$ et $0 < a_n < 1 < b_n$.*
2. *Montrer que (a_n) est décroissante et déduire qu'elle converge.*
3. *Justifier que $a_n \leqslant \dfrac{2}{n}$ pour tout entier $n \geqslant 3$. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.*
4. *On admet que pour $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $(1+t)^n \geqslant 1 + nt + \dfrac{n(n-1)}{2}t^2$.*
   Démontrer que, pour tout $n \geqslant 3$, on a $b_n < 1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}$. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Exercice 13.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x^k$.

1. *Calculer $f_n(x)$ en fonction de n et x.*
2. *En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$.*
3. *En utilisant ce qui précède calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} k2^k$.*
4. *Calculer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2\ 015x^{2016} - 2\ 016x^{2\ 015} + 1}{(x-1)^2}$*
5. *Montrer que l'équation $f_n(x) = n-1$ admet pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une unique solution dans $[0\,;1[$ qu'on note α_n.*
6. *Déterminer α_1 et α_2.*
7. *Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) = n - 1 + \alpha^{n+1}$. En déduire que la suite (α_n) est croissante puis qu'elle converge vers une limite l.*
8. *Montrer que $l \in [0\,;1]$.*
9. *Justifiez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(\alpha_n) \leqslant \dfrac{\alpha_n}{1-\alpha_n}$.*
10. *Montrer par l'absurde que $l = 1$.*

Exercice 14.

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 2xe^x$

1. *Montrer que f réalise une bijection de $[0;1]$ sur un ensemble que l'on déterminera.*
   On note f^{-1} la bijection réciproque de f. Donner les tableaux des variations de f et de f^{-1}
2. *Vérifier qu'il existe dans $[0;1]$ un et un seul réel noté α tel que $\alpha e^{\alpha} = 1$.*
   Montrer que $\alpha \neq 0$.
   On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
   $$u_0 = \alpha \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$$
3. (a) *Montrer que pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n \in [0;1]$*
   (b) *Montrer que pour tout réel x de $[0;1]$, $f(x) - x \geqslant 0$. Vérifier que l'égalité ne se produit que pour $x = 0$.*
   (c) *En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.*
   (d) *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et qu'elle a pour limite 0.*
4. *On pose pour tout entier naturel n : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$*
   (a) *Montrer que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n\, e^{-u_{n+1}}$.*
   (b) *En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{e^{-S_n}}{2^n}$*

(c) *Montrer que* $u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ *et en déduire que la suite de terme général* S_n *est majorée par 2. En déduire que* (S_n) *convergente.*
On note L *la limite de* (S_n).

(d) *Montrer que* $\alpha \leqslant L \leqslant 2$.

(e) *Montrer finalement que* $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n u_n = e^{-L}$

Exercice 15.

Posons $f_n(x) = x^n + 1 - nx$:

1. *Montrer que, pour chaque entier* $n \geqslant 2$, *l'équation* $x^n + 1 = nx$ *possède une unique solution dans l'intervalle* $[0\,;1]$. *On note* x_n *cette racine.*
2. *Etudier le signe de* $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. *En évaluant en* $x = x_n$, *en déduire le signe de* $f_{n+1}(x_n)$.
3. *Déterminer la monotonie de la suite* $(x_n)_{n\geqslant 2}$.
4. *Justifier que* $\forall n \geqslant 2;\ \dfrac{1}{n} \leqslant x_n \leqslant \dfrac{2}{n}$. *En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
5. *En utilisant l'égalité* $f_n(x_n) = 0$, *déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n$.

Exercice 16.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n *par :* $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$:

1. *Montrer que l'équation* $f_n(x) = 0$ *n'a qu'une seule solution positive, notée* u_n.
2. *Calculer* u_1 *et* u_2 *et vérifier que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ u_n \in \left]0\,;\dfrac{2}{3}\right[$
3. *Montrer que, pour tout x élément de* $]0\,;1[$, *on a :* $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
4. *En évaluant l'inégalité précédente en* $x = u_n$; *déterminer le signe de* $f_{n+1}(u_n)$.
   Quelle est alors la monotonie de la suite (u_n)?
5. *Montrer que la suite* (u_n) *est convergente. On note* l *sa limite.*
6. *A l'aide de la question 2, encadrer* u_n^n *puis déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n$.
   En déduire la limite de $(4 - 9u_n^2)$ *et expliciter* l.

Pour aller plus loin

Exercice 17. *(***)*

Soit $f\ :\ [a\,;b] \to \mathbb{R}$ *continue. On dit f admet un point fixe s'il existe* $x_0 \in [a\,;b],\ f(x_0) = x_0$.

1. *Montrer que si* $f([a\,;b]) \subset [a\,;b]$ *alors f admet un point fixe.*
2. *Montrer que si* $[a\,;b] \subset f([a\,;b])$ *alors f admet un point fixe.*

Exercice 18. *(***) Soit* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue et décroissante.*
Montrer que f admet un unique point fixe.

Indication : On considère la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) - x$, *et on étudie la limite de* $g(x)$ *en* $-\infty$ *et en* $+\infty$.

Exercice 19. *(***)*

1. *Montrer que les seules applications continues de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{Z}$ *sont les fonctions constantes.*
2. *Soient* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *et* $g\colon I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues telles que*

$$\forall x \in I, |f(x)| = |g(x)| \neq 0$$

   Montrer que $f = g$ *ou* $f = -g$.