Exercice 1 (Opérations sur les événements)

On tire deux cartes dans un jeu de 32 cartes. On note A l'événement "les deux cartes tirées sont rouges", B l'événement "les deux cartes tirées sont un valet et un dix" et C l'événement "les deux cartes tirées sont des têtes".

1. Que représente les événements $\overline{A}$, $A \cup C$, $A \cap B \cap \overline{C}$
2. Soient F l'événement "les deux cartes tirées sont des têtes et ne sont pas toutes les deux rouges" et G l'événement "on obtient au plus une tête".
   (a) Écrire F et G l'aide des événements A, B, C.
   (b) Calculer les probabilités des événements A, B, C puis des événements F et G

Exercice 2

Une cible de tir à l'arc peut comporter plusieurs cercles concentriques définissants des zones z_j numérotées de 1 à N, la première z_1 étant un disque de rayon r_1 la deuxième z_2 une couronne circulaire de rayon intérieur et extérieur r_1 et r_2, les suivantes de même, la dernière z_N étant une couronne circulaire de rayon intérieur et extérieur r_{N-1} et r_N. On suppose que l'impact du tir appartient à une seule de ces régions.
Pour j allant de 1 à N, les événements élémentaires sont notés e_j. En désignant par p_j la probabilité de e_j et on suppose qu'il est deux fois plus probable d'atteindre la zone z_j que la zone z_{j-1}. Déterminer les valeurs de des probabilités p_j.

Exercice 3 (Dénombrements)

Une caisse contient 24 pièces dont 5 défectueuses. On tire simultanément trois pièces de la caisse. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

* A : "aucune des trois pièces tirées n'est défectueuse".
* B : "les trois pièces sont défectueuses".
* C : "une seule pièce est défectueuse".
* D : "au moins une des trois pièces tirées est défectueuse".

Exercice 4 (Système complet d'événements)

On considère sur un univers Ω fini, une probabilité P. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ un système complet d'événements tel que la suite finie $(P(A_i))_{i \in [\![1;n]\!]}$ soit en progression arithmétique de premier terme $P(A_1) = \dfrac{1}{2n}$.

1. Déterminer $P(A_i)$ pour $i \in [[1;n]]$.
2. Soit B un événement tel que :
$$\forall i \in [[1;n]],\ P_{A_i}(B) = \frac{i}{2n}$$
   Calculer $P(B)$.

Exercice 5 (Indépendance)

On lance 2 dés au hasard. Étudier l'indépendance mutuelle et l'indépendance deux à deux des événements :

* A :"le 1$^{\text{er}}$ dé donne un numéro pair".
* B :"le 2$^{\text{e}}$ dé donne un numéro impair".
* C :"la somme des deux numéros est impaire".

Exercice 6

On lance 3 dés d_1 et d_2, et d_3 qui ne sont pas truqués.
Pour $i \in [[1;6]]$, on note S et I les variables aléatoires données par :

* S :"Le maximum des résultats de d_1 et d_2
* I :"Le minimum des résultats de d_2 et d_3.

1. Calculer les probabilités $P(S \leqslant i)$ et $P(I \geqslant i)$
2. Pour quelles valeurs de i a-t-on $(S \leqslant i)$ et $(I \geqslant i)$ indépendants.

Exercice 7 (Systèmes complets d'événements)

Un jeu entre deux joueurs A et B est divisé en parties indépendantes. À chaque partie, celui qui perd donne un euro au gagnant. La probabilité que A gagne est $p \in [0;1]$ et la probabilité que B gagne est $q = 1 - p$.
Les joueurs A et B possèdent au total une somme de N euros. Le jeu s'arrête dès que l'un des deux joueurs est ruiné c'est à dire possède une somme nulle.
On note p_k la probabilité qu'a le joueur A, en partant de la somme k supposée entière, d'être ruiné par la suite.

1. Calculer p_0 et p_N.
2. Montrer que $p_k = pp_{k+1} + qp_{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que si $p \neq \frac{1}{2}$,
$$p_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}$$
et si $p = \frac{1}{2}$,
$$p_k = \frac{N-k}{N}$$

Exercice 8 (Variable aléatoire)

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches. Ces $k+3$ boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- ⋆ un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
- ⋆ un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
- ⋆ un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ;

Un joueur joue une partie. On note Y_k la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. (a) Justifier l'égalité : $p(Y_k = 5) = \dfrac{6k}{(k+3)^2}$.

   (b) Écrire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_k.

2. On note $\mathrm{E}(Y_k)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y_k
   On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $\mathrm{E}(Y_k)$ est strictement positive.
   Déterminer les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.

Exercice 9

A chaque journée de cours, L mange soit à la cantine de son lycée soit n'a pas le temps de manger en raison d'un temps d'attente trop long devant cette cantine. Précisément, quand le professeur lui permet de sortir de classe avant la sonnerie, L parvient à manger avec probabilité $\dfrac{2}{5}$. Lorsque le professeur lui impose de sortir à la sonnerie, elle n'a alors qu'une chance sur cinq de manger. Malgré son programme fort chargé, le professeur compatit au pauvre sort de L et la laisse donc sortir en avance avec probabilité $\dfrac{2}{3}$. On suppose que, d'un jour à l'autre, les décisions du professeur de laisser ou non sortir L en avance sont indépendantes. On introduit les événements suivants :

- ⋆ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note L_n « L parvient à manger au n^e jour de cours ».
- ⋆ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note E_n : « Le professeur laisse sortir L en avance au n^e jour de cours ».
- ⋆ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note A_n : « L n'a pas mangé deux fois de suite pour la première fois aux $(n-1)^e$ et n^e jours de cours »

1. Dans cette question, on considère un jour de cours $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

   (a) Montrer que $P(L_n) = \dfrac{1}{3}$.

   (b) On constate que L n'a pas mangé, quelle est la probabilité que l'enseignant ne l'ait pas laissé sortir à l'avance ?

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = P(A_n)$
   (a) Calculer u_1 et u_2
   (b) À l'aide de la formule des probabilités totales établir :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n$$
   (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n
3. Pour tout entier naturel n non nul, on note
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$
   (a) Montrer que S_n représente la probabilité d'un certain événement, dont on donnera un libellé explicite.
   (b) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, déterminer sa limite et interpréter le résultat.

Exercice 10 (Extrait modifié ESSEC 2004)

I. Calcul matriciel

Pour tout réel a, on considère les matrices

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1-a & (1-a)^2 & (1-a)^3 \\ 0 & a & 2a(1-a) & 3a(1-a)^2 \\ 0 & 0 & a^2 & 3a^2(1-a) \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}, \qquad D(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer P^2 et donner l'inverse de P.
2. Vérifier que $\forall a \in \mathbb{R}, \quad M(a) = PD(a)P^{-1}$.
3. Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad M(a)M(b) = M(ab)$. . En déduire que $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad [M(a)]^n = M(a^n)$.
4. Comment choisir $c \in \mathbb{R}$ pour que $M(c) = I$?
   Montrer que si $a \neq 0$, il existe un réel b tel que $M(a)M(b) = I$. En déduire l'inverse de $M(a)$. La matrice $M(0)$ est-elle inversible ?

II. Etude d'une expérience aléatoire

On dispose de 3 pièces de monnaie, chacune ayant la probabilité p d'amener pile $(0 < p < 1)$ et $1-p$ d'amener face. On pourra poser : $q = 1-p$. On s'intéresse à l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer des lancers successifs selon le protocole suivant :

- ⋆ à l'étape 1, on lance les 3 pièces ;
- ⋆ à l'étape 2, on lance les pièces ayant amené pile à l'étape 1 (s'il en existe) ;
- ⋆ à l'étape 3, on lance les pièces ayant amené pile à l'étape 2 (s'il en existe),
- ⋆ à l'étape 4, on lance les pièces ayant amené pile à l'étape 3 (s'il en existe),

et ainsi de suite.
À chaque étape, les lancers des pièces sont supposés indépendants. On considère les événements :

A_n : « obtenir 0 pile à l'étape n » B_n : « obtenir 1 pile à l'étape n »
C_n : « obtenir 2 piles à l'étape n » D_n : « obtenir 3 piles à l'étape n ».

On pose les deux conventions suivantes :

- ⋆ L'événement D_0 est l'événement certain et les trois événements A_0, B_0, C_0 sont impossibles.
- ⋆ si à une certaine étape n_0 aucun côté pile n'apparaît, on considère que pour tous les entiers n supérieurs ou égaux à n_0 l'événement A_n est réalisé.

1. Calculer les quatre probabilités $P(A_1), P(B_1), P(C_1)$ et $P(D_1)$.

2. Pour tout entier naturel n, calculer très soigneusement les 16 probabilités conditionnelles

$$\begin{array}{cccc} P_{A_n}(A_{n+1}) & P_{B_n}(A_{n+1}) & P_{C_n}(A_{n+1}) & P_{D_n}(A_{n+1}) \\ P_{A_n}(B_{n+1}) & P_{B_n}(B_{n+1}) & P_{C_n}(B_{n+1}) & P_{D_n}(B_{n+1}) \\ P_{A_n}(C_{n+1}) & P_{B_n}(C_{n+1}) & P_{C_n}(C_{n+1}) & P_{D_n}(D_{n+1}) \\ P_{A_n}(D_{n+1}) & P_{B_n}(D_{n+1}) & P_{C_n}(D_{n+1}) & P_{D_n}(D_{n+1}) \end{array}$$

3. A l'aide d'une formule de probabilité totale, exprimer $P(A_{n+1})$ (resp. $P(B_{n+1})$, resp. $P(C_{n+1})$, resp. $P(D_{n+1})$) en fonction des probabilités $P(A_n), P(B_n), P(C_n), P(D_n)$.

4. Pour tout entier naturel n, on considère la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \\ P(D_n) \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer une matrice M telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = MU_n$ puis montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = M^n U_0$.

   (b) Donner U_0 puis, à l'aide de la question 4 de la partie I, calculer les 4 coefficients de U_n.

Exercice 11 (Ecricome 2011. Extraits)

PARTIE I. Un jeu en ligne.

La société Lehazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.

Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

	A	B	C
1	★		
2	★		
3		★	

On définit les événements H, V, D, N par :

— H : « les trois jetons sont alignés horizontalement ». — V : « les trois jetons sont alignés verticalement ».
— D : « les trois jetons sont alignés en diagonale ». — N : « les trois jetons ne sont pas alignés ».

1. Justifier qu'il y a 84 positionnements possibles des trois jetons dans les trois cases.
2. Déterminer les probabilités $\mathrm{P}(H)$, $\mathrm{P}(V)$, $\mathrm{P}(D)$ des événements $H, .V, .D$.
3. En déduire que la probabilité de l'événement N est égale à : $\mathrm{P}(N) = \dfrac{19}{21} \simeq 0.9048$
4. On note Z le gain de la société lors d'une partie. Calculer $E(Z)$.

PARTIE III. Contrôle de la qualité du jeu.

On constate que, parfois, la fonction aléatoire est déréglée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case $(A, 1)$, les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes. On note Δ l'événement « la fonction aléatoire est déréglée »et on pose $\mathrm{P}(\Delta) = x$ avec $x \in]0, 1[$.

1. Calculer les probabilités conditionnelles $\mathrm{P}_\Delta(H)$, $\mathrm{P}_\Delta(V)$, $\mathrm{P}_\Delta(D)$.
2. Utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement $\left(\Delta, \overline{\Delta}\right)$ pour en déduire que la probabilité les jetons ne soient pas alignés est $\mathrm{P}(N) = -\dfrac{x}{84} + \dfrac{19}{21}$.
3. Soit G la variable aléatoire égale au gain réalisé par la société de jeu lors d'une partie jouée. Déterminer la valeur maximale de x pour que l'espérance de gain soit positive.
4. On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés. Quelle est la probabilité, en fonction de x, que la fonction aléatoire ait été déréglée ?

Exercice 12 (ESCO 92)

Deux pièces (une chambre et la salle) A et B sont reliées entre elles de la façon suivante : A ouvre sur B et B ouvre sur l'extérieur. Une guêpe initialement (à l'instant 0) dans la pièce A voudrait sortir à l'air libre. A chaque instant $n \in \mathbb{N}$ son trajet obéit aux règles suivantes :

- ⋆ Lorsqu'elle est dans la pièce A au temps n, alors au temps $n+1$ elle reste en A avec une probabilité de $1/3$ et elle passe dans la pièce B avec une probabilité de $2/3$.
- ⋆ Lorsqu'elle est en B au temps n, alors au temps $n+1$ elle retourne en A avec une probabilité de $1/4$, elle reste en B avec une probabilité de $1/2$ et elle sort à l'air libre avec une probabilité de $1/4$.
- ⋆ Enfin, lorsqu'elle est à l'air libre, elle ne revient plus.

Pour tout entier n, on notera A_n l'événement "la guêpe est dans la pièce A à l'instant n " et de même B_n.

D_n pour "être dehors à l'instant n " et S_n l'événement "la guêpe sort à l'instant n".

On notera a_n, b_n, d_n et s_n leurs probabilités respectives.

1. (a) Déterminer les probabilités a_0, b_0, s_0, a_1, b_1, s_1 et s_2.
   (b) Sachant qu'à l'instant 2 elle est en A, quelle est la probabilité qu'elle ait été en B à l'instant 1?
   (c) Justifier que pour tout entier n :
   $$A_{n+1} = (A_n \cap A_{n+1}) \cup (B_n \cap A_{n+1}) \text{ et } B_{n+1} = (A_n \cap B_{n+1}) \cup (B_n \cap B_{n+1})$$
   et en déduire pour tout entier n, les relations de récurrence suivantes :
   $$a_{n+1} = \tfrac{1}{3}a_n + \tfrac{1}{4}b_n \text{ et } b_{n+1} = \tfrac{2}{3}a_n + \tfrac{1}{2}b_n$$
   (d) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 2a_n$.
   (e) En déduire pour $n \geq 1$, l'expression de a_n et de b_n en fonction de n.
   (f) Calculer les limites de a_n et de b_n quand n tend vers $+\infty$ et interprèter ce résultat.
2. (a) Justifier que pour tout entier $n \geq 2$, $s_n = \dfrac{1}{4}b_{n-1}$ et en déduire s_n en fonction de n.
   (b) Déterminer la probabilité que la guêpe soit dehors à l'instant 10. (on ne cherchera pas à simplifier le résultat)

Exercice 13 (D'après ECRICOME 2001)

Première partie : calcul des puissances successives de la matrice $M(a)$

Soit $M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$, où a représente un nombre réel.

1. Montrer que, pour tous réels a, b, on a : $M(a)M(b) = M(a+b-3ab)$.
2. Montrer que si $a \neq 1/3$ il existe alors un réel b tel que $a+b-3ab = 0$. En déduire que si $a \neq 1/3$ alors la matrice $M(a)$ est inversible.
   Calculer $M\left(1/3\right)^2$ et en déduire que $M\left(1/3\right)$ n'est pas inversible.
3. Déterminer le réel a_0 non nul, tel que : $\left[M(a_0)\right]^2 = M(a_0)$.
4. On considère les matrices $P = M(a_0)$ et $Q = I - P$, où I désigne la matrice unité d'ordre 3.
   (a) Montrer que pour tout a, il existe un réel α -que l'on exprimera en fonction de a- tel que : $M(a) = P + \alpha Q$.
   (b) Calculer P^2, QP, PQ, Q^2.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\left[M(a)\right]^n$ s'écrit $x_nP + y_nQ$ avec x_n et y_n des réels.
   (d) Expliciter alors la matrice $\left[M(a)\right]^n$.

Deuxième partie : évolution d'un titre boursier au cours du temps.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $a \in \left]0, \tfrac{2}{3}\right[$.

1. On définit des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par leur premier terme p_1, q_1, r_1, et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} p_{n+1} = (1-2a)p_n + aq_n + ar_n \\ q_{n+1} = ap_n + (1-2a)q_n + ar_n \\ r_{n+1} = ap_n + aq_n + (1-2a)r_n \end{cases}$$

(a) Exprimer p_n, q_n, r_n en fonction de n, p_1, q_1, r_1. (b) Étudier la convergence de ces suites.

2. Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut monter, rester stable, ou baisser. On considère que :
   - ⋆ le premier jour le titre est stable ;
   - ⋆ si un jour n, le titre monte, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$, restera stable avec la probabilité $\dfrac{1}{6}$, et baissera avec la probabilité $\dfrac{1}{6}$;
   - ⋆ si un jour n, le titre est stable, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $\dfrac{1}{6}$, restera stable avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$, et baissera avec la probabilité $\dfrac{1}{6}$;
   - ⋆ si un jour n, le titre baisse, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $\dfrac{1}{6}$, restera stable avec la probabilité $\dfrac{1}{6}$, et baissera avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$.

   On note M_n (respectivement S_n, respectivement B_n) l'événement « le titre donné monte (respectivement reste stable, respectivement baisse) le jour n ».

   (a) Exprimer les probabilités de hausse, stabilité et baisse au jour $n+1$ en fonction de celles au jour n.

   (b) En déduire les probabilités de hausse, de stabilité, et de baisse au jour n.

   (c) Quelles sont les limites de ces probabilités lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 14 (Urnes, boules et suites)

On considère deux urnes :

1. une urne verte contenant une boule rouge et 3 vertes 2. une urne rouge contenant deux boules rouges et deux vertes.

On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la façon suivante :

- ⋆ le premier tirage est effectué dans l'urne verte
- ⋆ à partir du second, ils sont effectués dans l'urne dont la couleur est celle de la boule tirée précédemment.

Pour tout entier n non nul, on notera V_n le fait d'obtenir une boule verte lors du $n^{iéme}$ tirage, v_n sa probabilité et $\mathcal{V}_n$ le fait de l'effectuer dans l'urne verte. De même pour rouge.

1. **Les trois premiers tirages**. Déterminer la probabilité d'obtenir
   (a) la première boule verte au troisième tirage. (b) la première boule rouge au troisième tirage.
   (c) au moins une boule verte dans les 3 premiers tirages. (d) une seule boule rouge lors des 3 premiers tirages.

2. **Les deux premiers tirages**

   (a) Si le premier tirage a donné une boule rouge, quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte au second tirage ?

   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte au second tirage ?

   (c) On a obtenu une boule verte au second tirage. Quelle est la probabilité que ce tirage ait été effectué dans l'urne rouge ?

3. **Le $n^{\text{ième}}$ tirage**

   (a) Pour tout entier $n \geq 1$, déterminer v_{n+1} en fonction de v_n et de r_n

(b) En déduire que $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + \frac{1}{2}$, puis l'expression de v_n en fonction de n

4. **La première rouge et la première verte**
Soit X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule rouge et Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule verte.

(a) Pour tout entier $n \geq 1$, décomposer l'événement $(X = n)$. (b) En déduire $\mathrm{P}(X = n)$.
(c) Pour tout entier $n \geq 1$, décomposer l'événement $(Y = n)$. (d) En déduire $\mathrm{P}(Y = n)$.

Exercice 15 (Urnes, boules et indépendance)

Une urne contient 13 boules dont 6 noires, 3 blanches et 4 rouges. On pioche 4 boules.
On pose E : "obtenir exctement 2 blanches " et F : "obtenir exactement 2 rouges"

1. On suppose qu'il n'y a pas remise.
Calculer les probabilités suivantes : $P(E \cap F)$, $P_F(E)$, $P_E(F)$. Les évènements E et F sont-ils indépendants ?
2. Refaire l'exercice en supposant que l'on pioche avec remise

Exercice 16 (Des urnes et des boules)

Une urne contient 20 boules dont 8 noires, 7 rouges et 5 blanches. On pioche sans remise 4 boules.

1. Calculer les probabilités des évènements suivants :
(a) A =« obtenir exactement deux boules blanches » (b) B =« obtenir au moins une boule blanche » (c) C =« obtenir autant de boules blanches que de boules rouges » (d) D =« obtenir aucune boule noire »

2. Calculer les probabilités conditionnelles suivantes
$P_A(B)$, $P_B(A)$, $P_A(C)$, $P_C(A)$, $P_A(D)$, $P_D(A)$,
$P_B(C)$, $P_C(B)$, $P_B(D)$, $P_D(B)$, $P_D(C)$, $P_C(D)$
3. Refaire l'exercice en supposant que l'on pioche avec remise.

Exercice 17 (Commencer par le plus facile ?)

Un archer tire sur une cible située à 20 m et une cible située à 50 m. Il effectue trois tirs en changeant de cible à chaque fois. La probabilité d'atteindre la cible à 20 m (resp. 50 m) est p (resp. q) avec $q < p$. On suppose que les tirs indépendants. Il gagne le jeu s'il atteint deux cibles consécutivement.
Calculer la probabilité de gagner en commençant par la cible située à 20 m (resp. située à 50 m). Par quelle cible a-t-il intérêt à commencer ?

Exercice 18 (Pièce truquée)

On considère une suite de lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" est p et d'obtenir "face" est $q = 1 - p$ ($p \in]0; 1[$). "pile" (resp. "face") sera noté P (resp. F). Soit A_n l'évènement "la séquence PF apparait pour la première fois aux lancers $(n - 1)$ et n".
Calculer $P(A_n)$ lorsque (a) $n = 3$ (b) $n = 4$ (c) $n = 5$ (d) n quelconque.

Exercice 19 (Suites, probabilités et matrices)

On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. et $M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

1. **Calcul de M^n :**
Montrer que, pour tout entier naturel n : $M^n = \frac{1}{2^n}I + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)J$.

2. **Une application probabiliste** :
Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante : si, à l'instant n, il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $(n+1)$, soit il y reste, avec une probabilité de $\frac{2}{3}$, soit il se place sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité.
On note :
   - ⋆ A_n l'événement : « le mobile se trouve en A à l'instant n ».
   - ⋆ B_n l'événement : « le mobile se trouve en B à l'instant n ».
   - ⋆ C_n l'événement : « le mobile se trouve en C à l'instant n ».

   On pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.
   (a) Exprimer, pour tout entier naturel n, a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ puis montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$
   (c) En déduire l'expression de a_n, b_n et c_n et calculer les limites correspondantes.

Exercice 20

Trois joueurs A, B et C s'affrontent simultanément dans un jeu en plusieurs manches.

Pour chaque manche il n'y a qu'un vainqueur possible.

A et B sont de même force et gagnent les manches chacun avec une probabilité de $\frac{1}{5}$

Est déclaré vainqueur de ce jeu le premier joueur qui gagne deux manches **consécutives.**

1. Quelle est la probabilité de gain de C pour chaque manche ?
2. *On* ***pourra****, dans cette question, s'aider d'un arbre pondéré représentant les trois premières manches du jeu.*
   (a) Quelle sont les probabilité pour A, pour B, et pour C de gagner le match à l'issue de la deuxième manche ?
   (b) Quelle est la probabilité que le jeux comporte au moins trois manches ?
   (c) Montrer que la probabilité que A gagne le match à l'issue de la troisième manche est égale à $\frac{4}{125}$.
   (d) Quelle est la probabilité que C gagne la première partie sachant que A gagne le match à l'issue de la troisième manche ?
3. Pour tout n entier, $n \geq 1$, on note A_n (respectivement B_n ou C_n) l'événement : « le jeu n'est pas achevé avant la $n^{\text{ième}}$ manche et et la $n^{\text{ième}}$ manche est gagné par A (respectivement B pour B_n, ou C pour C_n) **et le jeu continue** ».
On note également D_n : « le jeu est achevé avant la $n^{\text{ième}}$ manche ou lors de la $n^{\text{ième}}$ manche ».
Conseil : prenez le temps de bien comprendre ces événements
   (a) Calculer $P(A_1)$, $P(B_1)$, $P(C_1)$, $P(A_2)$, $P(B_2)$ et $P(C_2)$.
   (b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, que peut-on dire des événements $A_{n+1} \cap A_n$ et $A_{n+1} \cap D_n$?
   (c) En appliquant la formule des probabilités totales, montrer que $P(A_{n+1}) = \frac{1}{5}(P(B_n) + P(C_n))$
   (d) En reprenant rapidement le raisonnement précédent pour les événements B_{n+1} et C_{n+1}, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\begin{cases} P(A_{n+1}) = & \frac{1}{5}(P(B_n) + P(C_n)) \\ P(B_{n+1}) = & \frac{1}{5}(P(A_n) + P(C_n)), \\ P(C_{n+1}) = & \frac{3}{5}(P(A_n) + P(B_n)) \end{cases}$
4. (a) A partir du résultat précédent, démontrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $P(A_n) = P(B_n)$.
   (b) En déduire, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $P(C_{n+1})$ en fonction de $P(A_n)$.

(c) Démontrer pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, que $P(A_{n+2}) = \frac{1}{5}P(A_{n+1}) + \frac{6}{25}P(A_n)$.

5. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $P(A_n)$ en fonction de n.

(b) A l'aide de la question 3.d, montrer, pour $n \geqslant 2$, que $P(C_n)$ peut s'écrire sous la forme $P(C_n) = \frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^n - \frac{3}{10}\left(-\frac{2}{5}\right)^n$.

Vérifier que cette formule convient également pour $n = 1$.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(D_n)$ et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} P(D_n)$. Quelle conclusion peut-on en tirer ?